

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ТЕПЛОФИЗИКИ

М. А. ГОЛЬДШТИК, В. Н. ШТЕРН

# ГИДРО- ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
Новосибирск · 1977

**Гидродинамическая устойчивость и турбулентность.**  
Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Новосибирск,  
«Наука», 1977.

В монографии исследуются проблемы линейной и нелинейной устойчивости ламинарных и турбулентных течений. В рамках линейной теории изучена зависимость критических параметров от кинематики и геометрии потока на примерах плоскопараллельных, осесимметричных, струйных и МГД-течений. Обнаружены новые качественные свойства малых возмущений. Разработанные численные методы решения задач гидродинамической устойчивости позволяют экономично и надежно определять собственные значения при любых значениях параметров. Предложена эскалаторная модель генерации автоколебаний конечной амплитуды, изучен характер ветвления этих решений. Сформулирован принцип максимальной устойчивости для выбора среди допустимых решений единственного, аппроксимирующего вторичный режим. Построена приближенная теория пристенной турбулентности и рассчитан универсальный пристеночный закон для усредненной турбулентной скорости без использования эмпирических констант.

Книга рассчитана на специалистов по гидромеханике, аспирантов и студентов старших курсов.

Ил. 115, библи. 582.

Ответственный редактор  
чл.-кор. АН СССР С. С. Кутателадзе

## ВВЕДЕНИЕ

Теория турбулентности по-прежнему остается открытой проблемой гидромеханики, несмотря на то, что она в течение целого века привлекает внимание многих выдающихся исследователей, а число работ по данной теме исчисляется тысячами. Такой интерес к турбулентности обусловлен, с одной стороны, ее широким применением и познавательной ценностью, так как большая часть материального мира состоит из жидкости, газа и плазмы, находящихся в турбулентном движении, с другой — все возрастающей ее прикладной значимостью для аэрокосмонавтики, энергетики, химической технологии, метеорологии и экологии.

Основные трудности при исследовании турбулентности связаны с наличием большого числа степеней свободы, сильным нелинейным взаимодействием между ними, сложным и хаотическим характером движения.

В реальном турбулентном режиме случайные и детерминистические свойства тесно сочетаются. Однако в разных задачах одно из этих начал может преобладать. Традиционные статистические теории на передний план выдвигают случайную природу турбулентности. Именно поэтому основным объектом изучения такого рода теорий является однородно-изотропная турбулентность, т. е. хаотический процесс в чистом виде. В этой области, начиная с работ Фридмана и Келлера, получено много важных и оригинальных результатов в трудах Колмогорова, Лойцянского, Миллионщикова, Мони́на, Обухова, Седова, а также Тейлора, Кармана, Бэтчелора, Хопфа, Крейчнана и др.<sup>1</sup> Однако несмотря на большие усилия,

---

<sup>1</sup> Труды всех упомянутых во «Введении» исследователей отражены в литературе.

вызвавшие к жизни огромное количество публикаций, в статистической гидромеханике нерешенных проблем остается больше, чем решенных. Например, основная задача о распределении энергии в турбулентном спектре, решенная А. Н. Колмогоровым на основе физических соображений методами теории размерностей, до сих пор представляет собой орешек, с которым пока не справились теоретики, желающие получить тот же результат более строгими методами.

Кроме колмогоровского закона «пяти третей» наиболее существенным достижением, имеющим общее значение, является представление о механизме передачи энергии от крупномасштабных пульсаций к мелкомасштабным с помощью каскадного процесса Ричардсона — Колмогорова. Три типа энергетических явлений характерны для реального турбулентного течения: во-первых, генерация крупномасштабных волн, зависящая от конкретных свойств рассматриваемого потока в целом; во-вторых, дробление вследствие нелинейности этих волн на более мелкомасштабные и передача энергии без заметной убыли вниз по спектру, т. е. колмогоровский каскадный процесс; в-третьих, вязкая диссипация энергии на самых мелких масштабах. До недавнего времени только два последних явления подвергались анализу статистическими методами (см., например, работы Кузьмина и Паташинского). Теория строилась без учета механизма генерации; необходимая пульсационная энергия вносилась в жидкость извне путем введения случайной внешней силы. Между тем генерационный аспект проблемы турбулентности основной, поскольку включает причины возникновения турбулентности и механизм ее поддержания. В процессе генерации преобладает детерминистическое начало, поэтому статистические методы здесь менее пригодны. Неустойчивость и генерация обнаруживаются в линейном приближении, которое является чисто детерминистическим, так как в нем самовоздействие пульсаций и каскадный процесс исключены. При детерминистическом рассмотрении возникает необходимость конкретизировать способ усреднения пульсационных полей. В основе статистического подхода лежит понятие усреднения по гиббсовскому ансамблю, имеющее максимальную общ-

ность. Для установившегося течения в канале можно указать другие способы усреднения — наряду с экспериментальным по времени существует усреднение по однородным координатам  $x$  или  $z$ . Однако в общем случае нестационарной задачи в трехмерной области эти способы непригодны и их приходится обобщать, искусственно вводя некоторую однородную переменную, в частности номер экземпляра в ансамбле равновероятных реализаций. Метод Гиббса не единственно возможный способ усреднения. Можно, например, если уравнения движения формально это допускают, искусственно увеличить размерность пространства, в котором наблюдается явление, и использовать для усреднения новые однородные координаты. Конечно, это курьез, но при наличии естественных однородных переменных, а практически таковые всегда имеются, усреднение следует проводить по ним, поскольку операция усреднения имеет конкретную математическую форму, а не выступает просто в качестве некоторой абстрактной операции, как при статистическом усреднении. Высказанные соображения находят фактическое применение в этой книге, где в основном используется именно усреднение по однородным координатам.

В задачу данной работы не входит подробный обзор развития исследований по гидродинамической устойчивости и турбулентности. Однако, имея в виду дальнейшие модельные построения, нельзя не коснуться фундаментальных опытных фактов и обойтись без краткой характеристики идей и методов упомянутых исследований.

Основоположник науки о турбулентности О. Рейнольдс в результате экспериментального изучения течений в прямых круглых трубах установил, что, если критерий  $R = Ud/\nu$  ( $U$  — средняя скорость;  $d$  — диаметр трубы;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости) имел величину, меньшую некоторой критической  $R_*$ , то возмущения, вносимые в поток, затухали и линии тока оставались прямолинейными и параллельными. При  $R > R_*$  возмущения нарастали и развивался турбулентный режим течения. Было замечено, что величина  $R_*$  зависит от начальной энергии возмущений, причем с возрастанием

энергии  $R$ . уменьшается, достигая конечного предельного значения. Рейнольдс вывел уравнения, носящие его имя, которые хотя и незамкнуты, так как содержат целый неизвестный тензор турбулентных напряжений, но послужили основой для дальнейших теоретических построений. В отношении причины турбулентности Рейнольдс выдвинул гипотезу, что турбулентность возникает из-за потери устойчивости ламинарным потоком. Таким образом, проблема гидродинамической устойчивости с самого начала приобрела важнейшее значение для анализа проблемы турбулентности. Понятие устойчивости — одно из основных в механике. Для того чтобы то или иное решение уравнений движения соответствовало наблюдаемым явлениям, необходима устойчивость этого решения к малым возмущениям.

Исследования по линейной устойчивости параллельных потоков были начаты еще Кельвином и Релеем. Последний показал, что необходимым условием неустойчивости течения невязкой жидкости является наличие точки перегиба в профиле скорости исходного потока. Основное уравнение для амплитуд гармонических возмущений, развивающихся в вязкой жидкости, было получено Орром и Зоммерфельдом. Трудности решения этого уравнения и результаты Релея относительно роли точек перегиба первоначально породили известный скепсис относительно возможности предсказания неустойчивости при течении в канале средствами линейной теории. Тот факт, что вязкость ответственна за диссипацию энергии, делал маловероятным вязкий механизм возникновения неустойчивости. И все-таки это оказалось так. Сначала Гейзенберг, а затем Толлмин, Шлихтинг и Линь, используя асимптотические методы, показали, что именно вязкость порождает в пристенной области такой сдвиг фаз у пульсаций компонент скорости, что возникают напряжения Рейнольдса, обеспечивающие генерацию пульсационной энергии за счет энергии среднего потока. Это «парадоксальное» свойство вязкости — один из важнейших факторов, определяющих существование турбулентности. Неустойчивость, вообще говоря, может порождаться и чисто конвективными причинами, примером чему служит течение между двумя вращающимися цилиндрами. Но,

как свидетельствует опыт, в таких случаях обычно развивается вторичный ламинарный режим. Впрочем, генерация турбулентности, по-видимому, возможна и с помощью невязкого механизма вследствие наличия точек перегиба в основном потоке. Однако для пристенной турбулентности типа потока в канале или в пограничном слое вязкий механизм генерации играет определяющую роль.

Критическое число Рейнольдса, вычисленное по линейной теории для течения в канале, оказалось слишком большим по сравнению с данными эксперимента. Это заставило искать другие, нелинейные, подходы к проблеме гидродинамической устойчивости. Прежде всего были развиты методы энергетических оценок критического числа Рейнольдса. Сюда относятся работы самого О. Рейнольдса, Лоренца, Орра, Кармана и др. Наиболее последовательно изложил этот вопрос Серрин, который показал, что если число Рейнольдса не превосходит некоторого значения  $R_0$ , то энергия произвольного начального возмущения монотонно затухает со временем. Таким путем получается оценка для критического числа Рейнольдса. Диапазон  $R_0 < R < R_*$  включает все экспериментальные данные по критическим числам Рейнольдса, но для течений с выпуклыми профилями скорости он составляет 2—3 порядка. В силу неудовлетворительности такого положения появились работы по собственно нелинейной теории гидродинамической устойчивости. Общие качественные представления были выдвинуты Ландау и развиты Струминским.

В конкретных работах этого плана, начиная со Стюарта и Мексина, рассматривалось поведение малых, но конечных по амплитуде возмущений вблизи кривой нейтральной устойчивости при учете тех или иных механизмов нелинейных взаимодействий. Строгий подход к проблеме ветвления ламинарных решений уравнений Навье — Стокса на основе метода Ляпунова — Шмидта обосновывается в работах Юдовича, который показал, что в канале при потере устойчивости имеет место жесткий характер возбуждения. Это значит, что, с одной стороны, при переходе числа Рейнольдса через критическое значение, определенное по линейной теории, неустой-

чивость развивается взрывообразно и сразу возникает турбулентность с конечной энергией пульсационного движения, с другой — при  $R < R_c$  существуют неустойчивые автоколебания с некоторой малой амплитудой, ибо возмущения с меньшей амплитудой затухают, а с большей нарастают.

Приведенные результаты, несомненно, имеют принципиально важное значение, но позволяют выявить только первую тенденцию влияния нелинейности, ибо относятся к автоколебаниям с очень малой амплитудой.

Для изучения реального ламинарно-турбулентного перехода и собственно турбулентности нужно рассматривать волны с немалой амплитудой. Поскольку в точной постановке это затруднительно, приходится прибегать к разного рода приближенным моделям, некоторые из них излагаются в данной работе. Однако на этом пути пока получены лишь первые результаты. На практике для расчета турбулентного переноса используются разнообразные полуэмпирические теории, в общем вполне отвечающие своему назначению.

Вслед за трудами основоположника полуэмпирических теорий Л. Прандтля появились работы Кармана, Тейлора, Ван-Дриста, Ротта, Сполдинга, Абрамовича, Авдуевского, Булеева, Гиневского, Гинзбурга, Глушко, Иевлева, Лапина, Леонтьева, Лойцянского, Федяевского, Шваба и др. В работах Кутателадзе и его учеников развита феноменологическая теория пристенной турбулентности, позволившая сформулировать относительные предельные законы без привлечения опытных констант.

Некоторые полуэмпирические теории и экспериментальные факты, на которых они базируются, излагаются в главе V. Поэтому здесь мы ограничимся лишь отдельными замечаниями общего характера.

Большую роль в полуэмпирических теориях играют положения теории размерностей и интуитивные физические представления. В ряде исследований проблема турбулентности решается методами теории переноса, для чего привлекается уравнение Больцмана или его модификации. Однако достижения молекулярно-кинетической теории, теорий разреженных газов, переноса нейтронов и излучения не могут служить га-

рантией применимости их методов в теории турбулентности, ибо турбулентность в отличие от перечисленных выше явлений не носит корпускулярного характера. Правда, существуют представления, восходящие к Прандтлю, о том, что в основе турбулентного обмена импульсами лежит перенос жидких комков — молей. И подобные образования действительно наблюдаются на практике. Но, во-первых, эти моли не имеют сколько-нибудь выраженной индивидуальности, во-вторых, они движутся не в пустоте, а в жидкой среде, так что взаимодействуют не только друг с другом, но и со средой, в-третьих, они, скорее всего, являются результатом нелинейного опрокидывания волн наподобие барашков, которые наблюдаются на воде в ветреную погоду, так что подобные локальные вихревые образования сами должны получаться как продукт теории, а не служить ее априорной основой.

Слишком буквально следуют молекулярной аналогии теории, в которых вводится локальная турбулентная вязкость, зависящая от координат. Необходимо иметь в виду, что между молекулярными и турбулентными движениями есть существенная разница: первые являются высокоскоростными и микромасштабными, а вторые — медленными и крупномасштабными. Поэтому ясно, что турбулентная вязкость, если ее вводить, должна быть нелокальным интегральным оператором. Но сама операция введения турбулентной вязкости, повышающая дифференциальный порядок моделируемых членов и существенно изменяющая коэффициент при старших производных, а следовательно, радикально влияющая на характер решения, вряд ли целесообразна. Это только в одномерном случае безразлично, вводить ли эмпирическую турбулентную вязкость, или длину пути турбулентного перемешивания, или еще что-либо в этом роде. Но как только встает, например, вопрос о двумерном обобщении полуэмпирических теорий, все осложняется. Особенно неблагоприятно положение с взаимодействием внешнего регулярного сигнала с турбулентным потоком. В этом случае турбулентная вязкость зависит от частоты сигнала, т. е. перестает быть характеристикой собственно турбулентности, или, точнее, феноменологическим коэффициентом, и становится оператором.

Из сказанного следует, что необходимы другие модели, более адекватно описывающие турбулентность и ее влияние на внешний сигнал. Одна попытка такого рода приводится в этой книге.

В данной работе авторы старались найти феноменологические подходы к теории пристенной турбулентности, которая опиралась бы на опыт, но не включала бы в себя эмпирические константы. В основе этих подходов лежат две идеи с общей методологической концепцией — исследовать турбулентность детерминистическими средствами путем решения некоторых динамических уравнений.

Первая идея формулирует эвристический вариационный принцип, управляющий усредненными характеристиками реальных турбулентных потоков, а именно принцип максимальной устойчивости турбулентных течений. Высказывается гипотеза: реальный турбулентный поток устроен так, что внесенные в него неслучайные возмущения затухают быстрее, чем в других виртуальных потоках.

Для реализации этой идеи пришлось специально разработать методы решения задач гидродинамической устойчивости, пригодные для широкого класса профилей скорости и позволяющие рассчитывать любые характеристики стабильности того или иного течения во всем спектральном диапазоне. Такие методы и соответствующие алгоритмы были применены для решения задач теории гидродинамической устойчивости, что позволило получить в этой классической области новые результаты.

Реализованный с помощью прямых методов принцип максимальной устойчивости позволил вычислить параметры пристенной турбулентности, значения которых в полуэмпирических теориях заимствуются из опыта.

Вторая идея заключается в аппроксимации реального турбулентного процесса динамическим процессом с небольшим числом степеней свободы, параметры которых выбираются посредством решения нелинейной задачи на собственные значения. Здесь развит эскалаторный метод последовательного учета все большего числа степеней свободы, являющийся реализацией идеи Ландау о каскадном развитии неустойчивости. Уже в первом моногармоническом приближении удается получить интерес-

ные результаты по нелинейной теории устойчивости и описанию свойств турбулентного течения в пристенной области. Следующий этап, включающий первый как частный случай, состоит в расчете трехгармонических резонансных автоколебаний. Принцип максимальной устойчивости в этой постановке используется для выделения единственного решения из континуального множества допустимых.

Такой подход, последовательно примененный к задаче о турбулентном течении вблизи бесконечной плоскости, позволяет не только теоретически рассчитать профиль средней скорости и соответствующие константы логарифмического закона, но и определить ряд параметров пульсационного движения исходя из требования невязкого характера течения вдали от стенки. Естественно, что в модельных уравнениях, допускающих моногармоническое решение, члены, ответственные за каскадный процесс, отсутствуют. В силу этого из проблемы турбулентности выделяется ее генерационный аспект, так сказать, в «чистом» виде. Используемое приближение фактически основывается на искусственном рассечении спектра, которое позволяет автономно исследовать явление генерации. Представления об автономности генерации носят, конечно, приближенный характер, но они позволяют качественно верно раскрыть закономерности перехода, а в тех местах течения, где генерация — доминирующий фактор, рассчитанные характеристики находятся и в количественном согласии с опытными данными.

В книге главным образом изложены результаты, полученные в 1967—1975 гг.

Основным инструментом анализа в этой работе служит численный эксперимент, который вследствие быстрого развития вычислительной техники и разработки эффективных алгоритмов решения задач стал за последние десятилетия полноправным средством научных исследований. Численные методы могут быть использованы в двух направлениях. Первое из них — получение количественных результатов для уже поставленных задач, которые не поддаются решению аналитическими методами. Второе связано с апробацией и уточнением новых моделей, которые строятся на основе физических пред-

ставлений. Оба эти направления отражены в работе.

Первое направление, так сказать индуктивное, характерно для той части книги, где исследуется поведение малых возмущений и приводятся энергетические оценки. В рамках численного эксперимента излагаются количественные характеристики устойчивости различных течений. В результате сопоставления и анализа полученных результатов определен ряд общих и типичных свойств, выделены главные закономерности. Такой подход естествен и общепринят в экспериментальных исследованиях.

Второе направление представлено при анализе модельных автоколебаний и теоретических подходов к исследованию турбулентности. Можно сказать, что оно носит дедуктивный характер, поскольку предлагаемые модели конструируются на основе физических и интуитивных соображений, а численный метод в этом случае служит для проверки, отбора и уточнения моделей.

Хотя в основном в данной работе используется метод численного анализа, излагаемый материал следует рассматривать, скорее, в физическом, чем в математическом плане. Здесь отсутствуют строгие доказательства теорем существования и единственности → обычные признаки математической стройности и замкнутости теории. Но, на наш взгляд, время для введения совершенного формализма и математического обоснования наступает, когда получены результаты, т. е. когда суть явления и его адекватная математическая модель уже ясны. Для этого необходим предварительный этап, на котором проводятся экспериментальный и эвристический анализы. Такая последовательность типична для любого физического исследования и особенно закономерна для изучения столь сложного природного явления, как турбулентность.

На содержание книги большое влияние оказали работы С. С. Кутателадзе, выдвинувшего идею о консервативности основных характеристик пристенной турбулентности. Часть приводимых оригинальных результатов получена в соавторстве с С. С. Кутателадзе, Т. А. Лисейкиной, О. А. Лихачевым, М. Х. Правдиной, А. П. Сагалаковым и В. А. Сапожниковым. Весьма полезны были дискуссии с Г. А. Кузьминым. Большую помощь при оформлении рукописи оказали Н. И. Қозинская и В. Г. Косинова, которым авторы выражают свою благодарность.

## Глава I

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Методические проблемы играют принципиальную роль в задачах гидродинамической устойчивости и турбулентности. Поскольку интересующие нас нелинейные проблемы всегда сводятся к последовательности линейных задач, среди методических вопросов, рассматриваемых в данной главе, центральное место занимает разработка универсальных и эффективных алгоритмов решения краевых задач на собственные значения для систем линейных дифференциальных уравнений, собственные функции которых могут быть весьма «плохими», например резко изменяющимися, быстро осциллирующими, имеющими внешние и внутренние пограничные слои, а также соответствующими кратным собственным значениям.

Предлагаемые методы исключения и дифференциальной прогонки вполне отвечают указанным особенностям и, хотя мы не касаемся вопросов их формального математического обоснования, являются надежными, поскольку прошли обширную практическую апробацию, и точными, ибо не содержат неконтролируемых погрешностей.

### § 1. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ОРРА — ЗОММЕРФЕЛЬДА И МЕТОДЫ ЕГО РЕШЕНИЯ

Проблемы гидродинамической устойчивости порождают различные задачи на собственные значения, простейшей из которых и вместе с тем наиболее типичной является задача для уравнения Орра — Зоммерфельда

$$(1/R)v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v = i\alpha[(U-C)(v'' - \alpha^2 v) - U''], \quad (1)$$

где  $v$  — искомая комплекснозначная функция вещественного аргумента  $y$ , дифференцирование по которому обозначено штрихами;  $U=U(y)$  — данная вещественная функция;  $\alpha$  и  $R$  — вещественные параметры;  $C=X+iY$  — искомое комплексное собственное значение. Для уравнения (1) ставятся некоторые однородные краевые условия; например, при течении в полосе единичной полуширины с твердыми непроницаемыми границами они имеют вид

$$v(-1)=v'(-1)=0; \quad v(1)=v'(1)=0. \quad (2)$$

Вывод уравнения (1) и условий (2) будет дан в следующей главе. Он не представляет труда, но сама задача оказалась настолько тяжелой, что первые надежные приближенные решения были получены лишь через много лет после ее постановки. Трудность задачи обусловлена тем, что она является проблемой на собственные значения: при заданных  $\alpha$ ,  $R$  и  $U(y)$  найти такие значения параметра  $C$ , при которых задача (1)—(2) имеет решения, отличные от тривиального  $v \equiv 0$ . Даже в тех немногих случаях, когда удается явно выписать общее решение уравнения (1), например для течения Куэтта ( $U=y$ ), вековое уравнение, к которому сводится спектральная задача, лишь с огромным трудом поддается анализу.

В этих условиях большую роль играют качественные результаты относительно спектра уравнения (1). Прежде всего установлено, что при каждом  $\alpha$  и  $R$  уравнение (1) имеет счетный набор собственных значений  $C_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) и собственных функций  $v_n$ , образующих полную систему [246, 315, 515].

На комплексной плоскости  $C=X+iY$  собственные значения лежат в полуполосе, оценка границ которой дана в статье [545] и уточнена в работах [400, 401]:

$$U_{\min} + U'_{\min}/[2(\pi^2 + \alpha^2)] < X < U_{\max} + U'_{\max}/[2(\pi^2 + \alpha^2)]; \quad (3)$$

$$Y \leq U'_{\max}/(2\alpha) - (\pi^2 + \alpha^2)/(\alpha R). \quad (4)$$

Сужению границ полуполосы и распространению подобных оценок на более широкий класс задач посвящены

работы [345, 401, 578, 579]. Оценки получены путем использования интегральных выражений:

$$X = \int_{-1}^1 [U |v'|^2 + (\alpha^2 U + 1/2 U'') |v|^2] dy [I_1^2 + \alpha^2 I_0^2]; \quad (5)$$

$$Y = \left[ \int_{-1}^1 U' (v_r v'_i - v_i v'_r) dy - 1/(\alpha R) (I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2) \right] / (I_1^2 + \alpha^2 I_0^2), \quad (6)$$

где  $v = v_r + i v_i$ ;  $I_0^2 = \int_{-1}^1 |v|^2 dy$ ;  $I_1^2 = \int_{-1}^1 |v'|^2 dy$ ;  $I_2^2 = \int_{-1}^1 |v''|^2 dy$ . С помощью этих результатов можно получить

асимптотические оценки собственных значений при малых и больших значениях  $\alpha$ .

Разлагая решение уравнения (1) в ряд по степеням  $\alpha$ , при  $\alpha \ll 1$  нетрудно вычислить

$$Y_{2n-1} \simeq -\pi^2 n^2 / (\alpha R); \quad Y_{2n} \simeq -b_n^2 / (\alpha R); \quad \text{tg } b_n = b_n; \quad (7)$$

$$X_{2n-1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + 2 \cos n \pi \cos \pi y - 3 \cos 2n \pi y) U(y) dy. \quad (8)$$

При больших  $n$  величина  $b_n \rightarrow (2n+1)\pi/2$ . Выражение для  $X_{2n}$  сложнее. Оно получается подстановкой в (5) выражения  $v = y \sin b_n - \sin b_n y$  при  $\alpha \ll 1$ . Аналогично асимптотическое представление для спектра можно получить при малых  $R$  [19].

При  $\alpha \gg 1$  асимптотическое выражение для  $Y_n$  можно получить, если уравнение (1) привести к виду

$$v^{\text{IV}} - \alpha^2 [2 - (R/\alpha) Y - i(R/\alpha) (U - X)] v'' + \alpha^4 [1 + (R/\alpha) Y + i(R/\alpha) (U - X) + (R/\alpha^3) U'''] v = 0.$$

Поскольку  $U$  и  $U''$  предлагаются ограниченными, то согласно (3) это уравнение при  $\alpha \rightarrow \infty$  сводится к следующему:

$$v^{IV} - \alpha^2 (2(R/\alpha)Y) v'' + \alpha^4 (1 + (R/\alpha)Y) v = 0,$$

т. е. к исходному уравнению Орра — Зоммерфельда (1) при  $U = X = \text{const}$

$$v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v = i\alpha R(U - C)(v'' - \alpha^2 v). \quad (9)$$

Исследование этой задачи представляет некоторый самостоятельный интерес. Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$v = A_1 \text{sh } \alpha y + A_2 \text{ch } \alpha y + A_3 \sin \beta y + A_4 \cos \beta y;$$

$$\beta^2 = -[\alpha^2 + i\alpha R(U - C)].$$

Выполняя условие (2), получим однородную систему алгебраических уравнений, для нетривиальной разрешимости которой необходимо положить ее определитель равным нулю:

$$\begin{vmatrix} -\text{sh } \alpha & \text{ch } \alpha & -\sin \beta & \cos \beta \\ \alpha \text{ch } \alpha & -\alpha \text{sh } \alpha & \beta \cos \beta & \beta \sin \beta \\ \text{sh } \alpha & \text{ch } \alpha & \sin \beta & \cos \beta \\ \alpha \text{ch } \alpha & \alpha \text{sh } \alpha & \beta \cos \beta & -\beta \sin \beta \end{vmatrix} \sim (\beta \text{tg } \beta + \alpha \text{th } \alpha) \times (\alpha \text{tg } \beta - \beta \text{th } \alpha) = 0.$$

Несложный графический анализ показывает, что если пронумеровать корни, начиная с первого, в порядке их возрастания, то для нечетных  $n$  справедливо неравенство  $(n - 1/2)\pi \leq \beta_n \leq n\pi$ , причем при  $\alpha \rightarrow 0$   $\beta_n \rightarrow n\pi$ ; для четных  $n$  — неравенство  $n\pi \leq \beta_n \leq (n + 1/2)\pi$ , при  $\alpha \rightarrow 0$   $\beta_n = \text{tg } \beta_n$ .

Выражение для  $C_n$  имеет вид

$$C_n = U - i(\alpha^2 + \beta_n^2)/(\alpha R). \quad (10)$$

Вследствие приведенных оценок при  $\alpha \rightarrow \infty$  для любого конечного  $n$

$$Y_n \rightarrow -\alpha/R. \quad (11)$$

Асимптотические оценки (7) и (11) не зависят от вида профиля  $U(y)$  и в дальнейшем используются при

численных расчетах и для нумерации собственных значений. Делению собственных значений (10) на нечетные и четные соответствует классификация собственных функций  $v(y)$  на симметричные и антисимметричные относительно середины канала  $y=0$ .

Наименее затухающей является симметричная мода. Этим свойством обладают все известные ламинарные течения. Зависимость  $RY_1(\alpha)$  для профиля  $U = \text{const}$  изображена на рис. 1. Пунктирными кривыми нанесены асимптотические зависимости (7) для  $n=1$  и (11). Наиболее «опасному» возмущению ( $\max Y$ ) соответствуют значения:

$$\alpha = 2,66; \quad RY_1 = -4,64. \quad (12)$$

Кроме случая  $U = \text{const}$ , задача (1) — (2) не допускает ни одного аналитического решения. Поэтому исследование велось только приближенными и численными методами, причем разработка последних оказалась весьма непростым делом.

Основные препятствия на пути решения связаны с наличием малого параметра при старшей производной. В этом случае среди независимых решений (1) найдутся такие, которые имеют характер пограничного слоя вблизи краевых точек  $y = \pm 1$  и особых точек «невязкого уравнения»  $y = y_c (U(y_c) = C)$ . Детальный математический анализ этой ситуации проведен в работе [36].

Поскольку число работ по теории гидродинамической устойчивости составляет несколько тысяч и продолжает быстро расти, то методические вопросы и поиски оптимальных алгоритмов имеют большое значение. Существующие методы решения можно разделить на несколько групп. К первой (исторически) группе относятся аналитические приближенные методы — асимптотические

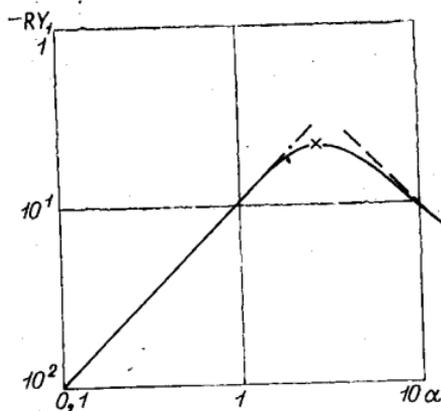


Рис. 1.

разложения и метод Релея. Вторую составляют вариационные методы. С появлением ЭВМ стали быстро развиваться конечно-разностные методы, составляющие третью группу. Последней, но, на наш взгляд, наиболее перспективной является группа методов пошагового интегрирования. Под этим условным названием подразумевается общий методический принцип — сведение краевых задач к задачам Коши и интегрирование последних с произвольным переменным шагом.

Сравнительно полную информацию о методах решения задач гидродинамической устойчивости можно найти в работах [15, 47, 200, 236]. Однако рост числа работ и усиливающаяся «конкуренция» различных методов делают, на наш взгляд, небесполезным краткий сравнительный обзор с акцентом на исследования последних лет.

Первые важные результаты в теории гидродинамической устойчивости были получены асимптотическими методами благодаря работам Гейзенберга [369], Толлмина [553], Шлихтинга [518], Линя [137, 439]. Математическому обоснованию асимптотических методов посвящены работы Вазова [26], Рейда [500—502], Крылова [113—115]. Их различные модификации использовались в нашей стране Короткиным [12, 111, 112], Павловым и др. [156, 170—174].

Суть асимптотических методов состоит в следующем. Интервал изменения независимой переменной для задачи (1) можно подразделить на следующие области: ядро течения, где решение приближенно удовлетворяет невязкому уравнению Релея

$$(U-C)(v''-\alpha^2 v)-U''v=0, \quad (13)$$

пристенные пограничные слои и окрестность критической точки.

Решение в ядре строится в виде так называемого «внешнего» разложения

$$v = v_0(y) + \frac{1}{(\alpha R)} v_1(y) + \frac{1}{(\alpha R)^2} v_2(y) + \dots \quad (14)$$

Первый член  $v_0(y)$  должен удовлетворять уравнению Релея (13). Решение (13) в общем случае представляет

трудную задачу. При  $\alpha \ll 1$  прибегают к разложению по степеням  $\alpha^2$  [137]. Если  $\alpha^2 \gg |U''/(U-C)|$ , то решение (13) приближенно равно  $\exp(\pm \alpha y)$ . Когда оба эти условия не выполняются, приходится прибегать к численному интегрированию [507].

Заметим, что в случае нейтральных колебаний ( $Y=0$ ) критическая точка является особой для уравнения (13). Для приближения решения в окрестности критической точки и границ  $y=\pm 1$  прибегают к так называемому «внутреннему» разложению. Оно состоит в замене независимой переменной  $y$  на  $\eta$ :

$$y = \gamma y_c + \eta (\alpha R)^{-n}; \quad \gamma \neq 0, 1.$$

При  $\gamma=0$  начало координат остается на месте, а при  $\gamma=1$  смещается в критическую точку. Решение находится в виде разложения в обобщенный степенной ряд по малому параметру

$$v = F_0(\eta) + (\alpha R)^{-n} F_1(\eta) + (\alpha R)^{-2n} F_2(\eta) + \dots \quad (15)$$

Показатель  $n$  подбирается при условии, чтобы коэффициенты в уравнении для  $F_0$  не зависели от  $\alpha R$ . Вдали от  $y_c$  можно положить  $\gamma=0$ , тогда получим  $n=1/2$ , а уравнение для  $F_0$  примет вид

$$-F_0^{IV} - i(U-C)F_0 = 0,$$

решение которого, «замораживая» коэффициенты, удобно качественно представить в форме

$$F_0(y) \sim \exp \left[ \pm \sqrt{\alpha R} \int \sqrt{i(U-C)} dy \right]. \quad (16)$$

В непосредственной окрестности критической точки, если только  $U'(y_c) \neq 0$ , допустимо разложение  $U(y) = U'(y_c)(y-y_c) + \dots$ . Полагая  $\gamma=1$ , получим  $n=1/3$ , так что для  $F_0$  применяется уравнение

$$F_0^{IV} - iU'(y_c)\eta F_0'' = 0,$$

решение которого выражается через функции Эйри [26].

Сращивая разложения в различных областях путем выбора постоянных интегрирования и удовлетворяя однородным краевым условиям, получают характеристическое уравнение. Если невязкое решение удается найти анали-

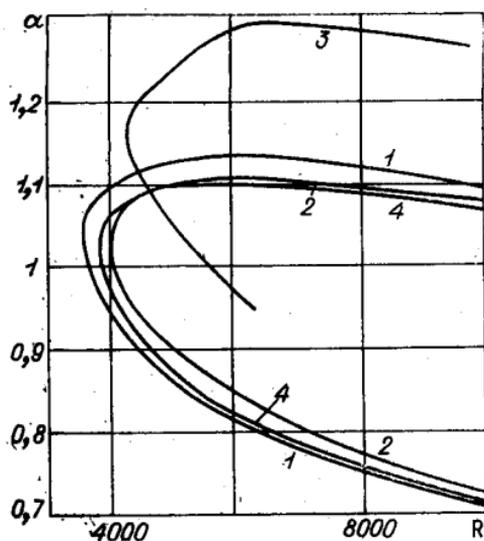


Рис. 2.

(1), Локка [443]—(2), Короткина [111]—(3), а также численными методами [202, 506, 552]—(4). Во всех известных нам случаях в асимптотических разложениях ограничивались только первыми членами, что объясняется трудностями аналитического определения следующих членов. Сходимость доказана только для метода Линя в случае течений Пуазейля [115].

Асимптотические методы являются незаменимыми при качественном анализе решений (1). Они применяются далее при описании свойств локальности. Пользуясь асимптотическим разложением, Линь получил предельные законы для ветвей нейтральной кривой. Однако область применения асимптотических методов ограничена в силу некоторых недостатков.

Точность определения критического числа Рейнольдса асимптотическими методами иллюстрирует рис. 2. С уменьшением параметра  $\alpha R$  она, естественно, уменьшается. Так, для течения Блазиуса асимптотическая теория дает  $R_c = 420$  при точном значении  $R_c = 520$ . Но даже и при весьма больших  $\alpha R$ , если  $\alpha$  достаточно велико, асимптотические результаты значительно расходятся с численными. Более того, в ряде случаев величина  $\alpha R$

тически и пристенный вязкий пограничный слой перекрывается критическим слоем, решение характеристического уравнения может быть найдено графически при использовании таблиц функции Титченса [137].

Существует несколько модификаций асимптотических методов. На рис. 2 проведено сопоставление нейтральных кривых течения Пуазейля, рассчитанных асимптотическими методами Линя [439]—

остаётся конечной для нейтральных колебаний при  $R \rightarrow \infty$ . В этой ситуации асимптотические методы не могут быть достаточно точными ни при каких  $R$ .

Асимптотические методы малопригодны для анализа спектра. Они дают весьма грубые результаты для нарастающих возмущений [202, 398] и просто неверные для затухающих [241, 356].

Таким образом, основными недостатками асимптотического подхода являются: а) узкая область применения; б) невозможность оценить допускаемую погрешность; в) трудоёмкость процесса определения собственных значений вплоть до использования ЭВМ.

К асимптотическим методам примыкает метод Релея, заключающийся в подразделении интервала на маленькие отрезки, внутри которых коэффициенты уравнения (1) принимаются постоянными. Полученные для каждого отрезка аналитические решения сопрягаются на стыках. Замыкают линейные уравнения для коэффициентов однородные граничные условия. Сходимость такого метода при уменьшении длины отрезков показана Герценштейном [42, 43]. К этому же направлению относятся и работы [256, 394, 534].

Довольно большое число исследователей пользуется вариационными методами, использование которых для задачи гидродинамической устойчивости обосновал Петров [175]. В этой же работе рекомендовано несколько вариантов построения базисных функций, которые позднее широко применялись. Доказательство сходимости метода Бубнова — Галеркина для течений типа струй и пограничных слоев при условии, что функции достаточно быстро убывают на бесконечности, дал Медведев [158]. Приемы повышения точности метода предложены Хариным [228]. Вариационный подход широко использовался группой пермских исследователей [47]. Позже вариационные методы стали применяться и за рубежом [319, 338, 357, 358, 434, 544]. В работах [482—484] галеркинский метод интерпретируется на основе метода локального потенциала [54]. Оржаг [474] предлагает в качестве базисных функций использовать полиномы Чебышева, поскольку в этом случае сходимость по числу базисных функций экспоненциальная. В работе [368]

рекомендуется использовать функции погранслоного типа. Каждый из авторов иллюстрирует эффективность предлагаемого варианта численными примерами, которые свидетельствуют, что эти методы хороши при  $\alpha R \sim 10^4$ . В основном при сравнении используется критическое число Рейнольдса для течения Пуазейля. В статье [290] даже специально была поставлена цель вычислить  $R$ , с точностью до семи значащих цифр.

Достоинство вариационных методов заключается в том, что сразу находится много спектральных значений и среди них можно выбрать наиболее опасное. Но это же и их недостаток, поскольку отыскание всех собственных значений заполненной матрицы 20—30-го порядка очень трудоемкий процесс и в связи с большими затратами машинного времени неприемлем при массовых расчетах. Кроме того, с ростом параметра  $\alpha R$  размер матриц, необходимый для достаточно точного определения собственных значений, увеличивается, а обусловленность их ухудшается. Видимо, именно с этим связано то обстоятельство, что все известные расчеты по методу Галеркина проводились при не очень больших значениях параметра  $\alpha R$ . Эффективным было бы сочетание вариационного метода, позволяющего определить наиболее опасную моду, с более экономичными методами пошагового интегрирования.

Начало использованию конечно-разностных методов в теории гидродинамической устойчивости положила работа Томаса [552]. Суть их заключается в аппроксимации производных конечными разностями и в решении получающейся системы классическими методами линейной алгебры. В простейшем случае, записывая (1) в виде системы

$$\begin{aligned} v'' - \alpha^2 v &= 0; \quad \theta'' - (\alpha^2 + \lambda)\theta = \mu v; \quad \lambda = i\alpha R(U - C); \\ \mu &= -i\alpha R U'' \end{aligned} \quad (17)$$

и заменяя производные конечной центральной разностью второго порядка  $v''_n = (v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n)/h^2 + O(h^2)$ , получим систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} v_{n+1} + v_{n-1} &= g v_n + h^2 \theta_n; \quad \theta_{n+1} + \theta_{n-1} = \lambda_n \theta_n + \mu_n v_n; \\ g &= 2 + h^2 \alpha^2; \quad \lambda_n = g + h^2 \lambda; \quad \mu_n = -i\alpha R h^2 \mu. \end{aligned}$$

Дополняя эту систему граничными условиями, можно воспользоваться для ее решения методом разностной прогонки [57]. Введем вектор  $V = \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix}$  и матрицу  $A_n = \begin{pmatrix} g & h^2 \\ \mu_n & \lambda_n \end{pmatrix}$ . Тогда система (17) примет вид

$$V_{n+1} + V_{n-1} = A_n V_n.$$

Прогоночная связь  $V_{n-1} = B_n V_n$  позволяет получить рекуррентную формулу для  $B_n$ :

$$B_{n+1} = (A_n - B_n)^{-1}. \quad (18)$$

Условие симметрии  $v' = \theta' = 0$  при  $y = 0$  дает  $B_0 = 1/2A_0$ . Определяя из (18)  $B_n$  для всех значений  $n$ , в частности при  $n = N$  (стенка), и удовлетворяя условиям прилипания  $v = v' = 0$ , получим характеристическое уравнение

$$2B_N^{12} - A_N^{12} = 0.$$

Такая очень простая и устойчивая схема, однако, требует достаточно мелкого шага. При небольших числах Рейнольдса она вполне приемлема и используется в данной работе в ряде расчетов. Сам Томас применял более точную аппроксимацию  $O(h^4)$ . При  $\alpha R \approx 10^4$  он получил достаточно точные (три знака) результаты при  $N = 100$ .

Вариант аппроксимации Томаса успешно использовался при расчете некоторых задач [365, 425, 478]. Дальнейшее развитие метод Томаса получил в работах [313, 346, 364, 456]. Метод построения разностных схем повышенной точности, а также его обоснование и применение к задачам гидродинамической устойчивости предложен Колобовым и Слепцовым [108, 210].

Известны попытки разностного расчета задач гидродинамической устойчивости с использованием двумерных сеток [318, 444]. Анализ необходимых условий, налагаемых на параметры сетки для корректного описания гидродинамических свойств, проведен Рождественским [133, 162, 183]. Исследования показали, что с ростом параметра  $\alpha R$  требуется все более мелкий шаг.

В силу того, что существуют малые области, где решения резко меняются, ясно, что маленький шаг нужен

лишь в окрестности некоторых точек интервала. Поэтому применение разностных схем с постоянным шагом весьма неэкономично. В работе Крылова и Малахиной [116] выход был найден в конструировании сетки с переменным шагом. Это позволило подойти к области больших значений  $\alpha R$  ( $\leq 10^6$ ). Переменная сетка неудобна в эксплуатации, поскольку ее параметры должны подстраиваться под свойства решения, которые заранее предугадать удается не всегда.

Принципиальное преодоление трудностей дают методы пошагового интегрирования. Среди них первым для задач гидродинамической устойчивости был использован метод стрельбы [269]. Любое решение, удовлетворяющее граничным условиям на одном из концов, можно записать в виде

$$v = A_1 v_1(y) + A_2 v_2(y), \quad (19)$$

где  $v_1, v_2$  — линейно независимые решения. Пусть интегрирование начинается с оси  $y=0$ , где выполняются условия симметрии  $v' = v''' = 0$ . Тогда независимые решения определяются, например, граничными условиями

$$v_1 = 1; \quad v_1' = 0; \quad v_1'' = 0; \quad v_1''' = 0. \quad (20)$$

$$v_2 = 0; \quad v_2' = 0; \quad v_2'' = 1; \quad v_2''' = 0. \quad (21)$$

В этом случае любое решение типа (19) будет удовлетворять граничным условиям на оси, и, наоборот, любое решение, удовлетворяющее этим условиям, можно представить в виде (19). Если дважды проинтегрировать (1) как задачу Коши с начальными условиями (20), (21) и определить тем самым  $v_1(y)$  и  $v_2(y)$ , то удовлетворяются граничные условия при  $y=1$ , если

$$v(1) = A_1 v_1(1) + A_2 v_2(1) = 0,$$

$$v'(1) = A_1 v_1'(1) + A_2 v_2'(1) = 0,$$

откуда следует характеристическое уравнение

$$F(C) = v_1(1)v_2'(1) - v_2(1)v_1'(1) = 0. \quad (22)$$

Этот метод очень прост и позволяет автоматически выбирать шаг интегрирования. Он успешно применяется

для расчета устойчивости слоев сдвига, струйных течений и даже пограничных слоев, когда числа Рейнольдса не слишком велики [15].

Однако поскольку при больших  $R$  одно из решений будет быстро осциллировать и экспоненциально расти в соответствии с (16), то метод пристрелки становится неэффективным. Действительно, пусть найдено быстро-растущее решение  $v_1$  (заметим, что при  $\alpha R \sim 10^4$  период осцилляции  $\sim 10^{-2}$  и решение возрастает в интервале  $(0, 1)$  примерно на 40 порядков). Попытаемся определить другое решение, которое не носит погранслоного характера. В формуле (19) для этого следует положить  $A_1 = 0$  и выбрать соответствующие начальные условия. Но при численном интегрировании в силу неизбежных ошибок округления появится добавка с малым коэффициентом  $A_1$ . Пусть  $v_2 \sim 1$  и ошибка округления  $\sim 10^{-12}$  (для БЭСМ). Так как  $v_1$  увеличивается на 40 порядков, то в конце интервала с машинной точностью опять получится решение  $v_1$ . Таким образом, из-за численных погрешностей решение  $v_2$  сливается с  $v_1$  и  $F(C)$  тождественно обратится в нуль при любом  $C$ . Для преодоления этих трудностей в работе [457] интервал разбивался пополам и проводилось встречное интегрирование с удвоенной точностью, что позволило не слишком увеличивать  $R$ .

Эффективное решение проблемы дает метод ортогонализации, предложенный Годуновым [56]. Он состоит в том, что при интегрировании делаются остановки, в которых от одной пары независимых решений  $v_1, v_2$  переходят к другой ортогональной паре  $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ . Если вместо  $v_2$  положить

$$\tilde{v}_2 = v_2 + B_1 v_1, \quad (23)$$

а коэффициент  $B$  выбрать так, чтобы скалярное произведение  $(v_1, \tilde{v}_2) = 0$ , то  $B_1 = -(v_1, v_2)/(v_1, v_1)$ . Во избежание чисел с большими порядками решение  $v_1$  иногда нормируют:  $\tilde{v}_1 = B_2 v_1$ ;  $B_2 = 1/\sqrt{(v_1, v_1)}$ . Этот метод использован в статье [567].

В ряде работ [408, 434] фильтром для решения  $v_2$  служило невязкое уравнение (13), т.е. коэффициент  $B_1$  в (23) выбирался так, чтобы в точке остановки решение  $\tilde{v}_2$  удовлетворяло (13). Тем самым в качестве  $v_2$  выби-

ралось решение, близкое к невязкому. Аналогичный подход предложен в работе [43].

Метод исключения [64] — наиболее эффективный и экономичный способ построения базисных решений. Он излагается в следующем параграфе. Работы в этом направлении появились и за рубежом [397].

Альтернативным и в ряде случаев более удобным является метод дифференциальной прогонки [1, 13]. Суть его состоит в том, что в процессе прямой прогонки находятся не отдельные решения, а уравнение подпространства решений, определяемого граничными условиями на одном из концов интервала. После решения задачи на собственные значения собственная функция находится обратной прогонкой. Использование этого метода для преодоления упомянутых выше трудностей, возникающих при решении задач на собственные значения, в частности задач теории гидродинамической устойчивости, было предложено Сапожниковым [199, 201]. Одновременно и несколько позднее появились работы [146, 550]. В какой-то мере близок к методу дифференциальной прогонки детерминантный метод, предложенный Желтухиным [82], но он связан с быстрым ростом числа вспомогательных уравнений с увеличением порядка системы и трудностями при построении собственной функции. Среди других работ, посвященных методам решения задач гидродинамической устойчивости, укажем также на статьи [147, 150, 333, 381, 429, 475, 476].

Метод исключения и вариант метода прогонки, использованные в данной работе для решения широкого круга разнообразных задач, показали себя как надежные и универсальные. Они безотказно действовали при любых значениях  $\alpha R$ , а расчеты проводились вплоть до  $\alpha R \sim 10^{10}$  для пристенных и приосевых, коротко- и длинноволновых, нарастающих и затухающих возмущений. Они легко обобщались и эффективно действовали не только при решении уравнения Орра — Зоммерфельда, но при системах уравнений более высокого порядка, содержащих несколько малых параметров (МГД-течение при конечных  $R_m$ , спиральные потоки между цилиндрами). Использованные методы наиболее экономичны по сравнению с другими, о чем будет сказано ниже.

## § 2. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ

Существо метода состоит в понижении размерности пространства решений посредством уже найденных решений. Проиллюстрируем реализацию метода исключения на примере уравнений Орра — Зоммерфельда, а затем дадим его общую формулировку.

Пусть дана система (I.17). Сначала найдем быстрорастущее решение  $v_1, \theta_1$ . В силу экспоненциального роста и частых осцилляций этого решения удобно перейти к новым переменным  $q, f$ , имеющим характер логарифмических производных

$$q = v'/v; \quad f = \theta/v = v''/v - \alpha^2. \quad (1)$$

Подставляя (1) в (I.17), получим нелинейную систему третьего порядка

$$q' = \alpha^2 + f - q^2; \quad f'' = \lambda f - f^2 - 2qf' + \mu. \quad (2)$$

В силу условий симметрии  $q(0) = f'(0) = 0$ . Значение  $f(0)$  может быть назначено произвольно, в частности как корень уравнения  $f''(0) = 0$ , что обеспечит наиболее плавное поведение  $f(y)$  в окрестности  $y=0$ . Корни уравнения  $f'' = 0$  имеют вид

$$f_1 = \lambda/2 + \sqrt{\lambda^2/4 + \mu} \simeq \lambda; \quad f_2 = \lambda/2 - \sqrt{\lambda^2/4 + \mu} \simeq -\mu/\lambda,$$

причем приближенные равенства верны при  $\alpha R \gg 1$ . Легко видеть, что быстрорастущему решению отвечает условие  $f(0) = f_1$ , а решение  $f = \mu/\lambda$  является невязким (точным, если коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  постоянны). Однако элементарный анализ устойчивости методом «замороженных» коэффициентов показывает, что только решение, отвечающее быстрорастущему случаю, устойчиво. Любое решение, соответствующее произвольным начальным данным, через какой-то промежуток асимптотически сливается с единственным устойчивым (рис. 3). На этом рисунке показаны  $q_1(y)$  и  $q_2(y)$ , отвечающие начальным условиям  $f = f_1$  и  $f = f_2$  для  $U = 1 - y^2$ ;  $\alpha = 1$ ;  $R = 10^4$ ;  $C = 0,237 + 0,00374i$  (точка Томаса). Данное свойство можно проиллюстрировать и аналитически для случая  $U = \text{const}$ , когда  $f = \lambda = \text{const}$ , а  $q' = \rho^2 - q^2$ ,  $\rho^2 = \alpha^2 + \lambda$ . Отсюда  $q = \rho \operatorname{th}(\rho y + a)$ ,  $a = \text{const}$ , следовательно,  $q \rightarrow \rho$  при всех  $a$ , кроме  $a = -\infty$ ,

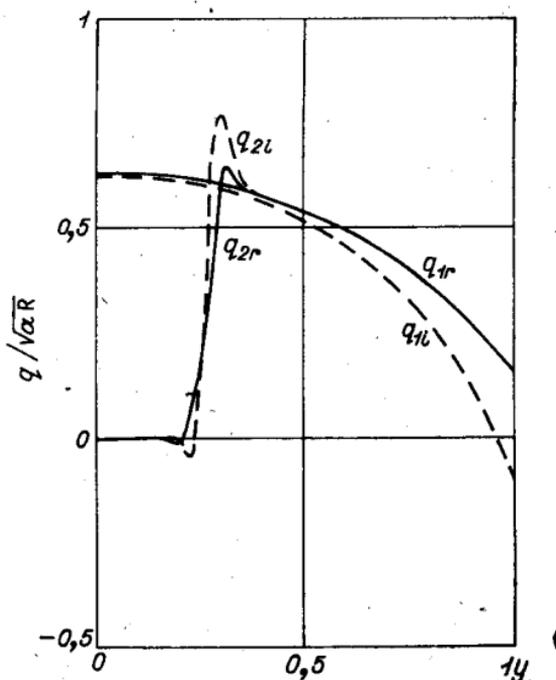


Рис. 3.

чему отвечает неустойчивое решение  $q = -\rho$ . Чем больше  $\rho$ , тем быстрее «забываются» начальные данные. Таким образом, быстрорастущее решение асимптотически устойчиво, поэтому его интегрирование можно осуществить с хорошей точностью при достаточно крупном шаге.

Для нахождения второго независимого решения воспользуемся процедурой понижения порядка линейного уравнения с помощью известного решения  $v_1$ . С этой целью преобразуем

$$v_2 = v_1 \int W/v_1 dy; \quad \theta_2 = \theta_1 \int W/v_1 dy + V \quad (3)$$

и подставим в (I.17), что дает систему

$$W' = V - qW; \quad V'' = (\alpha^2 + \lambda - f)V - 2f'W. \quad (4)$$

Заметим, что преобразование (3) обеспечивает линейную независимость решений  $v_1$  и  $v_2$ , если  $W$  и  $V$  тождественно не равны нулю. Действительно, дифференцируя (3) и

исключая интеграл, приходим к выражениям

$$W = (v_1 v_2' - v_1' v_2) / v_1; \quad V = (v_2'' v_1 - v_1'' v_2) / v_1,$$

из которых следует, что предположение о линейной зависимости  $v_1$  и  $v_2$  противоречит условию неравенства нулю  $W$  и  $V$ . Таким образом, нетривиальные решения (4) отвечают  $v_2, \theta_2$ , линейно независимым от  $v_1, \theta_1$ .

Систему (4) удобно привести к нелинейной форме, вводя

$$\Psi = W/V = (v_1 v_2' - v_1' v_2) / (v_1 v_2'' - v_1'' v_2); \quad \Phi = V'/V. \quad (5)$$

Тогда (4) преобразуется в систему

$$\Psi' = 1 - (q + \Phi) \Psi; \quad \Phi' = \alpha^2 + \lambda - f - \Phi^2 - 2f' \Psi, \quad (6)$$

причем граничные условия вследствие симметрии имеют вид  $\Psi(0) = \Phi(0) = 0$ . Система (6) в силу неоднородности имеет при нулевых начальных условиях нетривиальное решение. Заметим, что в случае  $U = \text{const}$  решения этой системы при  $\alpha R \gg 1$  независимо от начальных данных стремятся к функциям

$$\Phi = \sqrt{\alpha^2 + \lambda - f}; \quad \Psi = 1 / (q + \Phi).$$

Расчеты показывают, что и при  $U \neq \text{const}$  функции  $\Phi(y)$  и  $\Psi(y)$  вне окрестности точки  $y=0$ , где сказываются начальные условия, практически следуют этим зависимостям всюду, за исключением зоны критического слоя  $y=y_c$ , где они изменяются весьма резко. Характер функции  $\Psi(y)$  отражен на рис. 4 при параметрах точки Томаса. Из (5) следует, что значение  $\Psi(1)$  может рассматриваться как характеристическая функция, нули которой определяют собственное значение  $C$ :

$$F(C) = \Psi(1) = 0.$$

Важное свойство функции  $\Psi$  — ее независимость от конкретного выбора базисных функций  $v_1$  и  $v_2$ , поскольку, как это видно из (5), она инвариантна к любому линейному преобразованию  $v_1$  и  $v_2$ .

Асимптотические свойства системы (2) могут быть использованы для оптимизации расчета. Вдали от кри-

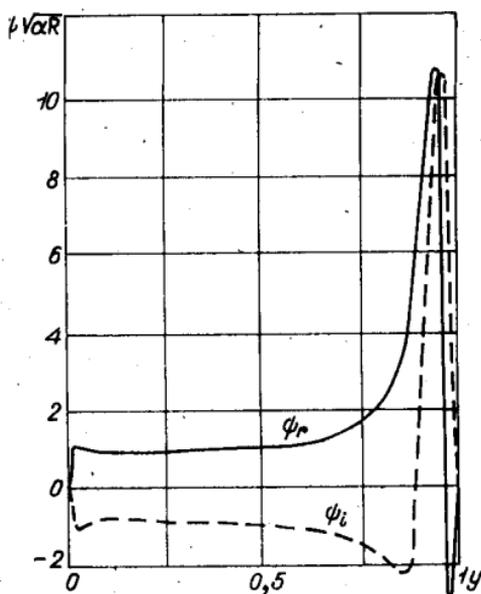


Рис. 4.

тической точки  $y_0$  можно воспользоваться асимптотическими формулами

$$f \approx \lambda; \quad q = \alpha^2 + f. \quad (7)$$

Интегрирование можно начинать не с  $y=0$ , а с  $y=y_1$ , используя (7) и  $f'=0$  в качестве начальных условий. Практика показывает, что без ущерба для точности (три значащие цифры  $Y$ ) можно при  $\alpha R \sim 10^4$  выбирать  $y_1=0,7$ , т. е. сокращать интервал интегрирования, а следовательно, и время расчета более чем вдвое. При больших значениях  $\alpha R$  экономия по этой при-

чине может быть значительно увеличена, что позволяет рассчитывать значения практически за одно и то же время ( $\leq 1$  с на БЭСМ-6) при любом значении  $\alpha R$ .

Опишем теперь процедуру исключения в общем виде. Пусть дана система  $n$  линейных дифференциальных уравнений

$$z'_k = B_{ks} z_s + b_k; \quad 0 \leq y \leq 1; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Здесь  $z(y)$  — искомый вектор;  $B(y)$  — матрица коэффициентов;  $b$  — вектор правых частей ( $b=0$  в задачах на собственные значения). Пусть при  $y=0$  заданы  $m$  граничных условий. Тогда

$$z_k = d_k; \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

Такая форма граничных условий не снижает общности, ибо более общие матричные граничные условия преобразованием координат всегда можно привести к диагональному виду.

Наша задача заключается в построении  $l=n-m$  решений, линейно независимых в каждой точке  $y \in [0,1]$ .

При  $y=0$  достаточно выбрать

$$\begin{aligned} z_k^1 &= d_k; & k &= 1, \dots, m; & z_n^1 &= 1; & z_k^1 &= 0; \\ & & k &= m+1, \dots, n-1; \\ z_k^j &= \delta_k^{n-j+1}; & k &= 1, 2, \dots, n; & j &= 2, \dots, l, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\delta_k^j$  — символ Кронекера.

Решение  $z_k^1(y)$  найдем непосредственным интегрированием (8) при граничных условиях (10). Поскольку решение  $z^1$  известно, то можно использовать его для понижения порядка системы (8), исключая одно из  $z_k$ .

Удобно ввести обозначение  $U_k^1 \equiv z_k^1$ . Будем искать второе решение (8) в виде

$$z_k^2 = a_1 U_k^1 + U_k^2, \quad (11)$$

где  $a_1(y)$  — искомая скалярная функция;  $U_k^2$  — вектор — функция с одной из компонент, равной тождественно нулю. Пусть для определенности  $U_n^2 \equiv 0$ , т.е. фактически вектор  $U^2$  имеет размерность  $n-1$ . Подставляя (11) в (8) и учитывая, что  $U^1$  — решение (8), получим

$$U_k^{2'} = B_{ks} U_s^2 - a_1' U_k^1; \quad a_1' U_n^1 = B_{ns} U_s^2; \quad k, s = 1, \dots, n-1. \quad (12)$$

Удобно принять  $a_1(0) = 0$ , тогда граничные условия для  $U^2$  в силу (10) примут форму  $U_k^2 = \delta_k^{n-1}$ .

Последним из уравнений (12) можно воспользоваться для исключения  $a_1'$ , после чего, вводя обозначение

$$B_{ks}^1 = B_{ks} - (B_{ns} U_k^1) / U_n^1,$$

приходим к системе  $n-1$ -го порядка

$$U_k^{2'} = B_{ks}^1 U_s^2; \quad k, s = 1, \dots, n-1. \quad (13)$$

Следующее решение (8) находится в виде

$$z_k^3 = a_1 U_k^1 + a_2 U_k^2 + U_k^3.$$

Обозначим последние два члена через  $U^2$  и, следуя изложенной процедуре, получим для  $U^2$  уравнения (13),

а затем, еще раз применяя ту же процедуру, придем к системе  $n-2$ -го порядка для  $U^3$ . Действуя таким образом, получим  $l$  решений (8). Нетрудно убедиться, что они линейно независимы.

Произвольная линейная комбинация найденных решений имеет вид

$$L_k = b_1 U_k^1 + b_2 U_k^2 + \dots + b_l U_k^l.$$

Поскольку у каждого из векторов  $U^j$  размерность на единицу меньше предыдущего, то требование  $L=0$  приводит к однородной системе для  $b_j$  с треугольной матрицей.

В любой точке хотя бы один элемент  $U^j$  отличен от нуля (в силу неоднородности задачи), поэтому всегда можно добиться, чтобы последний элемент не был равен нулю, при необходимости проводя перенумерацию. Тогда из  $L=0$  сразу следует  $b_j=0$ ,  $j=1, \dots, l$ , что и означает линейную независимость найденных решений. Конечно, один из определителей матрицы  $U_k^j$  порядка  $l$  может обращаться в нуль и служить характеристической функцией при решении задачи на собственные значения.

Процедуру исключения коэффициентов  $a_j$  можно не проводить, т. е. не переходить, например, от системы (12) к (13). Порядок просто будет понижаться при постепенной замене дифференциальных уравнений алгебраическими.

Метод исключения принципиально мало отличается от метода ортогонализации, но обладает преимуществами. Первое состоит в том, что в методе ортогонализации  $l$  раз интегрируется полная система (8), а ортогонализация проводится отдельно на специальных остановках, тогда как в методе исключения эти процедуры совмещены и, следовательно, экономится  $nm(m-1)/2$  операции умножения при вычислении правых частей (8). Второе, главное, преимущество состоит в том, что при каждом последующем интегрировании находятся все более гладкие, слаборастущие решения, допускающие более крупный шаг интегрирования.

Если задаться определенной точностью вычисления собственного значения, то можно в процессе каждого

интегрирования сокращать интервал. Пусть решения  $z^h$  нормированы так, чтобы  $|z^h(1)| = 1$ . Тогда интегрирование можно начинать с того  $y_h$ , где  $|z^h|$  впервые превысит заданное малое число  $\varepsilon$ , а в интервале  $[0, y_h]$  считать  $z^h = 0$ . Последний прием позволяет для любых значений малых параметров при производных затрачивать на решение задачи практически одно и то же машинное время.

### § 3. МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ

При всех своих достоинствах метод исключения, как и метод ортогонализации, довольно громоздок, особенно при большом порядке исходной системы. Легко убедиться, что с ростом  $n$  основное время займет процедура ортогонализации, число операций которой растет пропорционально  $m^4$ . Поэтому часто более удобен метод дифференциальной прогонки, который не связан с построением базисных решений и, следовательно, не включает процедуру ортогонализации. Он на своей первой (и главной) стадии состоит в вычислении уравнения подпространства, которому принадлежат все решения, удовлетворяющие граничным условиям на одном из концов. Известно, что в линейном векторном пространстве уравнением подпространства размерности  $l = n - m$  является совокупность  $m$  линейных связей на координаты, которую можно представить в виде

$$Mz = d, \quad (1)$$

$m \times n \quad n \quad m$

где  $z$  — вектор переменных  $z_k$ ;  $M$  и  $d$  — матрица коэффициентов и вектор правых частей (индексы внизу указывают размерности).

Граничные условия при  $y=0$  в самом общем случае имеют вид (1). Тем самым они выделяют определенное подпространство в пространстве решений  $z_k(y)$ . То, что уравнение этого подпространства дано связями переменных именно в точке  $y=0$ , — случайный факт. Связь типа (1) можно определить для любой точки  $y \in [0, 1]$ . Речь идет об определении коэффициентов матрицы  $M(y)$  и вектора  $d(y)$  так, чтобы (1) в каждой точке  $y$  выделяло

одно и то же подпространство решений. Для этого продифференцируем (1) по  $y$  и подставим  $z'$  из (2.8). Тогда

$$(M' + MB)z + Mb = d'.$$

Поскольку уравнение (1) определено для любого  $z$  из пространства решений, то

$$M' = -MB; \quad d' = Mb; \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (2)$$

Интегрируя первое уравнение (2) с известным начальным условием  $M(0)$ ,  $d(0)$ , найдем  $M$ ,  $d$  на всем интервале, в частности в точке  $y=1$ . Дополнив (1)  $l=n-m$  граничными условиями при  $y=1$ , получим систему  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными. Разрешая эту систему, найдем все  $z_k$  при  $y=1$  (или в случае задачи на собственные значения получим определитель системы как характеристическую функцию). Для определения решения  $z_k$  на всем интервале следует интегрировать от  $y=1$  до  $y=0$  произвольные  $l$  уравнений (2.8) с учетом  $m$  связей (1). При вычислении правых частей требуется  $mn^2$  умножений, т. е. столько же, сколько в методе ортогонализации, с той разницей, что мы экономим на самой процедуре ортогонализации. Поскольку при интегрировании задачи Коши все равно, с какой системой иметь дело (линейной или нелинейной), последний случай даже более предпочтителен, так как обычно исключается экспоненциальный рост и осцилляции. Поэтому удобнее реализовать дифференциальную прогонку в другой форме [348].

Уравнение (1), рассматриваемое как граничное условие при  $y=0$ , можно разрешить относительно  $m$  переменных  $z_k$ . Обозначим совокупность этих переменных вектором  $V$ , а оставшиеся вектором  $W$ . Тогда систему (2.8) и граничное условие можно записать в виде

$$V' = K V + G W + a; \quad (3)$$

$m \quad m \times m \quad m \quad m \times l \quad l \quad m$

$$W' = D V + E W + f; \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (4)$$

$l \quad l \times m \quad m \quad l \times l \quad l \quad l$

$$V = L W + g; \quad y = 0. \quad (5)$$

$m \quad m \times l \quad l \quad m$

Уравнение подпространства размерности  $l$  в разрешенной

относительно  $V$  форме записывается следующим образом:

$$V_m(y) = A_{m \times l}(y) W_l(y) + u_m(y); \quad y \in [0, 1]. \quad (6)$$

Дифференцируя (6) по  $y$  и исключая  $V'$ ,  $W'$  и  $V$  с учетом (3), (4) и (6), получим

$$\begin{aligned} [A' + AE + (AD - K)A - G]W + \\ + [u' + Af + (AD - K)u - a] = 0, \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности вектора  $W$

$$\begin{cases} A' = G - AE + (K - AD)A, \\ u' = a - Af + (K - AD)u; \end{cases} \quad (7)$$

$$A(0) = L; \quad u(0) = g.$$

Граничные условия вытекают из сопоставления (5) и (6). Интегрирование системы (7) составляет содержание прямой прогонки.

Граничное условие на другом конце интервала в общей форме можно записать в виде

$$Q_{l \times m} V_m + R_{l \times l} W_l = r; \quad y = 1.$$

Подставляя  $V$  из (6), получим

$$(QA + R)W(1) = r - Qu(1). \quad (8)$$

Разрешая это уравнение относительно  $W(1)$  и используя (6) для определения  $V(1)$ , найдем весь вектор  $z(1)$ . Интегрируя затем уравнение (4) с учетом (6), получим решение  $z$  на всем интервале  $0 \leq y \leq 1$ . Число операций умножения при вычислении правых частей с точностью до квадратичных членов равно  $m(n^2 - m^2)$ , т. е. прогонка — самый экономичный метод.

В случае однородной задачи  $a = f = g = r = 0$ . Тогда из (7) следует  $u \equiv 0$ , а (8) становится однородной системой. Условием ее нетривиальной разрешимости является равенство

$$F(C) = \det [QA(1) + R] = 0. \quad (9)$$

Иногда в силу специальных свойств решений удобно интегрировать (7) не до  $y = 1$ , а до промежуточной точки

$y=y_c$ . Затем проводится прямая прогонка от  $y=1$  до  $y=y_c$  с некоторыми другими прогоночными коэффициентами, которые обозначим через  $A_-$  и  $A_+$ . Индекс — указывает на направление интегрирования, исходные матрицы будем считать помеченными индексом  $+$ . Введем единичные матрицы  $I_m$  и  $I_l$ , где индексы указывают размерности этих квадратных матриц. Тогда (6) можно записать в виде

$$[I_m; -A_+]z = u_+, \quad (10)$$

$m \times l$      $n$      $m$

где в квадратных скобках — составная матрица  $m \times n$ , первые  $m$  столбцов которой являются матрицей  $I_m$ , а остальные  $l$  — матрицей  $A_+$ . Аналогично при прогонке от  $y=1$  до  $y=y_c$ , возможно, после перестановки некоторых столбцов

$$[I_l; -A_-]z = u_-. \quad (11)$$

$l \times m$      $n$      $l$

Условия (10) и (11) в совокупности составляют систему  $n$  уравнений для  $n$  неизвестных  $z_k$ . В случае однородной задачи характеристической функцией является детерминант составной матрицы  $n \times n$

$$F(C) = \det \begin{pmatrix} I_m & -A_+ \\ I_l & -A_- \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Если граничные условия на обоих концах одинаковы (значит,  $m=l$ ), выражение (12), как это следует из преобразований, упрощается:

$$F(C) = \det(A_+ - A_-). \quad (13)$$

Рассмотрим реализацию метода дифференциальной прогонки для уравнения Орра — Зоммерфельда, которое удобно записать в виде системы

$$S' = \mu v + \rho^2 \theta; \quad T' = \alpha^2 v + \theta; \quad v' = T; \quad \theta' = S; \quad \rho^2 = \alpha^2 + \lambda \quad (14)$$

с граничными условиями  $S(0) = T(0) = 0$  и  $T(1) = v(1) = 0$ . Таким образом, в данном случае  $m = l = 2$  и

$$z = \{T, S, v, \theta\}; V = \{T, S\}; W = \{v, \theta\}.$$

Тогда в системе (3) — (5)

$$L = K = E = 0; G = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 \\ \mu & \rho \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a = f = g = 0.$$

Полагая в (6)  $u = 0$ , получим прогоночные соотношения (уравнение подпространства) в виде

$$T = A_{11}v + A_{12}\theta; S = A_{21}v + A_{22}\theta, \quad (15)$$

а система (7) будет состоять из четырех нелинейных комплексных уравнений:

$$\begin{aligned} A'_{11} &= \alpha^2 - (A_{11}^2 + A_{12}A_{21}); & A'_{12} &= 1 - A_{12}(A_{11} + A_{22}); \\ A'_{21} &= \mu - A_{21}(A_{11} + A_{22}); & A'_{22} &= \rho^2 - (A_{22}^2 + A_{12}A_{21}) \end{aligned} \quad (16)$$

с начальными условиями  $A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = 0$  при  $y = 0$ . В силу того, что  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , из (9)

следует

$$F(C) = \det \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A_{22}(1).$$

В этом случае, как и в методе исключения, характеристическая функция становится одной из переменных системы (16). Обратную прогонку следует проводить, интегрируя последние два уравнения (14) с учетом (15). При этом из (14) исключаются уравнения с малым параметром при старшей производной.

Мы видим, что матрица  $Q$  оказалась почти нулевой. Если бы не это «почти», а так может случиться при соответствующих граничных условиях, то на собственных значениях  $C$  коэффициенты матрицы  $A$  в точке  $y = 1$  должны обращаться в бесконечность. Во избежание этой ситуации можно проводить встречную прогонку:

$$T = B_{11}S + B_{12}\theta; v = B_{21}S + B_{22}\theta. \quad (17)$$

Тогда для коэффициентов  $B_{ij}$  получим систему

$$\begin{aligned} B'_{11} &= (\alpha^2 - \mu B_{11}) B_{21} - B_{12}; & B'_{12} &= 1 + \alpha^2 B_{22} - \\ & & & - (\mu B_{22} + \rho^2) B_{11}; \\ B'_{21} &= B_{11} - B_{22} - \mu B_{21}^2; & B'_{22} &= B_{12} - (\mu B_{22} + \rho^2) B_{21}; & (18) \\ & & & B_{ij}(1) = 0. \end{aligned}$$

В точке стыковки  $y=y_c$  должны выполняться соотношения (15) и (17). Отсюда имеем систему для определения переменных  $z$

$$\begin{cases} T - A_{11}v - A_{12}\theta = 0; \\ S - A_{21}v - A_{22}\theta = 0; \\ B_{11}S - T + B_{12}\theta = 0; \\ B_{21}S - v + B_{22}\theta = 0; \\ y = y_c. \end{cases} \quad (19)$$

Характеристической функцией  $F(C)$  будет определитель этой системы

$$F(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -A_{11} & -A_{12} \\ 0 & 1 & -A_{21} & -A_{22} \\ -1 & B_{11} & 0 & B_{12} \\ 0 & B_{21} & -1 & B_{22} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Заметим, что  $F(C)$  можно по формуле (20) вычислить в любой точке интервала  $y \in [0, 1]$ . В частном случае при  $y_c = 1$  мы приходим к предыдущему результату  $F(C) = -A_{22}$ . При  $y_c = 0$  получаем  $F(C) = B_{12}$ .

Мы приводили примеры однородной прогонки. Рассмотрим неоднородный случай. Систему уравнений для амплитуд можно записать в виде

$$\begin{aligned} v' &= -iku; & u' &= r; & r' &= RU'v + au - ikq; \\ q' &= av + ikr; & a &= k^2 + i\alpha R(U - C). \end{aligned}$$

Прогонку удобно проводить в форме

$$u = Ar + B; \quad v = Gr + D; \quad q = Er + F. \quad (21)$$

При интегрировании от оси ставятся условия симметрии  $u=q=0$  и нормировочное условие  $v=1$  при  $y=0$ . Тогда начальные условия для коэффициентов имеют вид  $A=B=E=F=G=0$ ;  $D(0)=1$ . При интегрировании от стенки  $u=v=0$  с нормировкой  $q(1)=1$  приходим к условиям  $A=B=G=D=E=0$ ;  $F(1)=1$ . Система дифференциальных уравнений для коэффициентов в обоих случаях одна и та же:

$$\begin{aligned} A' &= AM + 1; \quad G' = GM - ikA; \quad E' = EM + aG + ik; \\ B' &= AL; \quad D' = GL - ikB; \quad F' = EL - aD; \\ M &= ikE - aA - R U'G; \quad L = ikF - aB - R U'\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Преимущество системы (22) заключается в ее «универсальности» относительно практически важных типов граничных условий. Прогоночные коэффициенты  $A$ ,  $G$ ,  $E$  резко меняются в окрестности критического слоя  $y_c$  и у стенки  $y=1$ . Они обладают «затягивающими» свойствами. У коэффициентов  $B$ ,  $D$ ,  $F$  «затягивающие» свойства отсутствуют, но поскольку уравнения для них линейны, то они нейтрально устойчивы. Численной устойчивости способствует направление интегрирования в сторону их роста — от  $y=0$  до  $y=1$ .

#### § 4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ И ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРОГОНОЧНОЙ СИСТЕМЫ

Выше были описаны «затягивающие» свойства решений и прогоночных коэффициентов при больших значениях  $\alpha R$ , которые еще усугубляются, если велики и значения  $\alpha$ .

Указанные особенности объясняются асимптотическими свойствами собственных функций уравнения Орра — Зоммерфельда. В последние годы техника асимптотических разложений значительно усовершенствовалась [501, 502]. Однако нас интересуют качественные результаты, поэтому мы для простоты используем не очень строгие, но наглядные методы.

Вне малой окрестности критической точки  $y_c$  четыре независимых решения уравнения Орра — Зоммерфельда при  $\alpha \gg 1$  и  $\alpha R \gg 1$  приближенно описываются соотношениями [137]

$$v_{1,2} \sim \exp \left[ \pm \int_{y_c}^y \sqrt{i\alpha R(U-C)} dy \right];$$

$$v_{3,4} \sim \exp[\pm \alpha(y-y_c)]. \quad (1)$$

Рассмотрим случай, когда критическая точка  $y_c$  расположена достаточно далеко от границ. Составим линейную комбинацию  $v_+$  тех двух решений из (1), амплитуда которых убывает по модулю при движении вправо от  $y_c$ , и линейную комбинацию  $v_-$  решений, убывающих влево от  $y_c$ . Требуя совпадения  $v_+$  и  $v_-$  (вместе с первыми тремя производными) в точке  $y_c$  или близкой к ней, получим характеристическое уравнение для определения  $C$ . Построенная таким образом функция  $v$  будет экспоненциально убывать по обе стороны от критической точки не медленнее, чем  $\exp(\gamma|y-y_c|)$ , где

$$\gamma = - \min \left[ \alpha, \left| \int_{y_c}^y \sqrt{i\alpha R(U-C)} dy \right| / |y-y_c| \right].$$

Поэтому при достаточно больших  $|\gamma|$  функция  $v$  и ее производные вблизи границ будут весьма малы, и на этих границах с точностью  $\exp[\gamma(1-y_c)]$  или  $\exp[\gamma|y_c|]$  окажутся выполненными произвольные однородные условия. Для точного удовлетворения граничных условий необходимо добавить к  $v$  у каждой из границ решения, быстро убывающие при движении к критической точке. Тогда в окрестности  $y_c$  эти добавки будут порядка  $\exp[2\gamma]$ . Требуя строгого выполнения условий непрерывности в точке  $y_c$ , можно найти поправки к собственному значению  $C$ , которые будут тоже порядка  $\exp(2\gamma)$ . Продолжая этот быстро сходящийся при больших  $\gamma$  процесс, мы получим в пределе точную собственную функцию  $v$ , которая практически отличается от нуля только в небольшой окрестности точки  $y_c$ , имеющей размер порядка  $1/\gamma$ . Отсюда следуют определенные выводы.

1. Коротковолновые возмущения практически финитны в области  $|y - y_c| \sim 1/\gamma$ .

2. Характер однородных условий на границе, лежащей вне области финитности, не влияет на величину собственного значения и форму собственной функции.

3. Названные характеристики зависят от формы профиля только на участке финитности; вне этого участка любые деформации профиля скорости не влияют на поведение коротковолновых возмущений.

Перечисленные локальности играют большую роль в данной работе и в дальнейшем будут подвергнуты специальному анализу, проиллюстрированы примерами и найдут неоднократное применение. Здесь же для методических целей наибольший интерес представляет свойство пункта 2. Для иллюстрации этого свойства был проделан следующий численный эксперимент. Сначала при некотором фиксированном значении волнового числа  $\alpha$  решалась спектральная задача в интервале  $(-1, +1)$ . Затем граничные условия переносились из точки  $y = -1$  внутрь интервала, в некоторую точку  $y_0$ , и значение  $y_0$  увеличивалось до тех пор, пока собственное значение  $S$  не становилось отличным от исходного на 1% (по вещественной или мнимой части). Таким путем можно было выяснить, насколько допустимо сокращать интервал интегрирования без ущерба для выбранной точности расчета. Локальные свойства возмущений, имеющих критический слой вблизи  $y = 1$ , будем характеризовать значением величины сокращенного интервала  $\Delta = 1/2(1 - y_0)$ , при котором возникает однопроцентная погрешность. Если  $\Delta = 1$ , то это значит, что сокращение недопустимо и  $y_0 = -1$ . Для возмущений, у которых критическая точка  $y_c$  расположена вблизи оси канала, интегрирование имеет смысл проводить лишь в интервале  $(-1, 0)$  или его части  $\Delta_1 = |y_0|$ .

На рис. 5 показаны зависимости  $\Delta$  и  $\Delta_1$  от  $\alpha$  для первой и третьей спектральных мод плоского течения Пуазейля при  $R = 10^4$ . Значение 1% выбрано произвольно, но это несущественно, поскольку фактически собственные значения в определенном интервале изменения  $y_0$  с высокой точностью от  $y_c$  не зависят. Там, где  $S(y_0) \neq \text{const}$ , собственное значение изменяется весьма резко,

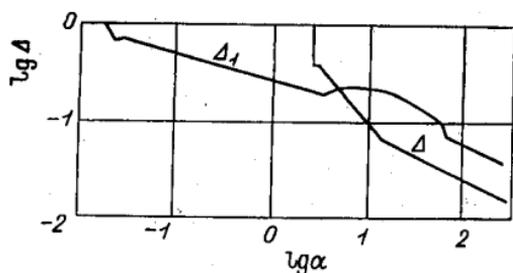


Рис. 5.

так что величины  $\Delta$  и  $\Delta_1$  вполне характеризуют интервал локальности.

Общей особенностью зависимостей, изображенных на рис. 5, является недопустимость сокращения интервала при значениях  $\alpha$ , меньших некоторого характерного  $\alpha_{\text{лок}}$ . Когда при увеличении  $\alpha$  достигается этот рубеж ( $\alpha = \alpha_{\text{лок}}$ ), величины  $\Delta$  и  $\Delta_1$  резко, практически скачком, падают, а затем плавно уменьшаются по определенным закономерностям, которые обуславливаются соотношением двух характерных масштабов вязкой и невязкой компонент решения. Как видно из (1), характерный масштаб затухания невязкого решения имеет порядок  $\delta_1 = 1/\alpha$ . Для определения вязкого масштаба  $\delta$  приведем профиль скорости  $U(y)$  в вязкой зоне к виду

$$U = U_1 + \gamma(y - y_1)^k,$$

где  $y_1$  — координата стенки ( $y = 1$ ) или оси ( $y = 0$ ) и  $U_1 = U(y_1)$ . Введем новую переменную  $z = (y - y_1)/\delta$ . Тогда уравнение Орра — Зоммерфельда примет форму

$$v^{IV} - 2\alpha_1^2 v'' + \alpha_1^4 v = i\alpha R\gamma\delta^{2+k} [(z^k - C_1)(v'' - \alpha_1^2 v)' - k(k-1)z^{k-2}v],$$

где  $\alpha_1 = \alpha\delta$ ;  $C_1 = (C - U_1)/\gamma\delta^k$ ; штрихи обозначают дифференцирование по  $z$ . Вязкий масштаб  $\delta$  определяется из требования, чтобы вязкие и инерционные факторы были одного порядка, т. е. чтобы коэффициент  $\alpha R\gamma\delta^{2+k}$  был порядка единицы. Отсюда получаем

$$\delta \sim (\alpha R \gamma)^{-1/(k+2)}.$$

Для пристенных возмущений следует принять  $y_1 = 1$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = U_0'$ ;  $U_1 = 0$  и вязкий масштаб  $\delta \sim (\alpha R U_0')^{-1/3}$ . Если  $\alpha$  не слишком велико, то  $\delta_1 > \delta$  и зону финитности собственной функции определяет невязкий масштаб  $\delta_1$ .

Однако вследствие разных законов убывания  $\delta$  и  $\delta_1$  с ростом  $\alpha$  положение меняется.

Свойства локальности для пристенных возмущений начинают проявляться с  $\alpha_{\text{лок}}=2,5$ , и вплоть до  $\alpha=15$  величина  $\Delta(\alpha)$  изменяется пропорционально  $1/\alpha$ . Как видно из рис. 5, при  $\alpha=15$  зависимость  $\Delta(\alpha)$  претерпевает излом, что связано с началом преобладания вязкого масштаба.

В случае приосевых возмущений  $U_1=U_{\text{max}}$ ;  $y=0$ ;  $k=2$ , поэтому  $\delta \sim (\alpha R \gamma)^{-1/4}$ . Именно по данному закону изменяется величина  $\Delta_1$ , уже с  $\alpha \geq 0,03$ . Это говорит о том, что для приосевых возмущений область финитности с самого начала определяется вязким масштабом. Следовательно, значение  $\alpha_{\text{лок}}$  для пристенных возмущений, поскольку оно определяется невязким масштабом, асимптотически не зависит от числа Рейнольдса, тогда как для приосевых возмущений такая зависимость существует. Согласно проведенным расчетам,  $\alpha_{\text{лок}} \approx 200/R$ .

Выявленные свойства локальности позволяют весьма существенно сокращать интервал интегрирования. Так, при расчете пристенных мод, например при  $\alpha=10$ , допустимо сокращать интервал интегрирования в 10 раз!

В практических расчетах сокращение интервала интегрирования проводилось с большей осторожностью, начиная с  $\alpha=10$  по следующему закону:  $\Delta=10/\alpha$ , что гарантировало точность вычислений до значений  $\alpha \approx 500$ .

Для заполненных профилей скорости турбулентного типа различие между приосевыми и пристенными модами еще разительнее. При нахождении пристенных собственных значений более заполненный профиль допускает большее сокращение интервала; приосевые моды обладают противоположным свойством. Это связано с тем, что критическая точка для более заполненных профилей при тех же волновых числах расположена дальше оси.

Одно из средств оптимизации алгоритма — специальный выбор прогоночных соотношений (3.6) так, чтобы минимизировать число операций в системе (3.7), исходя из конкретного вида матрицы  $B$ . Поскольку соотношение (3.5) не всегда соответствует оптимальному выбору векторов  $V$ ,  $W$ , после одного или нескольких первых шагов следует перейти к новым прогоночным соотношениям с

векторами  $V$ ,  $W$ . Такая же необходимость возникает в том маловероятном случае, когда в некоторой точке интервала прогоночная матрица, будучи мероморфной функцией, имеет полюс. Поскольку  $V$  и  $W$  имеют ту же размерность ( $m$  и  $l$ ), что и векторы  $V$  и  $W$ , переход осуществляется с помощью соотношения (3.6), которое представляет собой систему  $m$  линейных равенств. Разрешая эту систему относительно компонент вектора  $V$ , получим связь

$$V = AW + \bar{u},$$

которая и реализует искомый переход.

Переход к оптимальным прогоночным соотношениям можно провести, интегрируя  $l$  раз в небольшом интервале исходную систему (2.8). Прогоночное соотношение (3.6) запишем в матричной форме, повторяя его  $l$  раз для различных решений. Разрешая полученное матричное уравнение относительно  $A$  и  $\bar{u}$ , получим их начальные значения в точке перехода.

При численном решении задачи Коши для систем прогоночных дифференциальных уравнений было испытано несколько методов, в том числе методы Эйлера, Адамса. Хорошо себя зарекомендовал часто употребляемый метод Рунге — Кутта четвертого порядка точности, когда уравнение

$$z'(y) = f(y, z)$$

на одном шаге  $h$  решается с помощью соотношений

$$z_{n+1} = z_n + 1/6[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4];$$

$$k_1 = hf(y_n, z_n); k_2 = hf(y_n + 1/2h, z_n + 1/2k_1);$$

$$k_3 = hf(y_n + 1/2h, z_n + 1/2k_2); k_4 = hf(y_n + h, z_n + k_3).$$

Этот метод дает ошибку порядка  $h^5$ . Его недостаток — невозможность определения погрешности счета. Этот недостаток преодолен в методе Рунге — Кутта — Мерсена [130], где тот же порядок точности, но требуется пятикратное вычисление функции  $f$ :

$$z_{n+1} = z_n + 1/2(k_1 + 4k_4 + k_5);$$

$$k_1 = 1/3hf(x_n, y_n); k_2 = 1/3hf(y_n + 1/3h, z_n + k_1);$$

$$k_3 = 1/3hf[y_n + 1/3h, z_n + 1/2(k_1 + k_2)];$$

$$k_4 = 1/3hf[y_n + 1/2h, z_n + 3/8(k_1 + 3k_3)]; \quad k_5 = 1/3hf[y_n + h, z_n + 3/2(k_1 - 3k_3 + 4k_4)].$$

Величина погрешности этих формул не превосходит значения  $\epsilon$ , определяемого соотношением

$$\epsilon = 1/5 |k_1 + 4k_4 - 9/2k_3 - 1/2k_5|. \quad (2)$$

Приведенные формулы относятся как к одному уравнению, так и к системе. В последнем случае под величинами  $z$ ,  $f$ ,  $k$ ,  $\epsilon$  следует понимать векторы. Соотношение (2) позволяет прогнозировать и контролировать шаг интегрирования  $h$  так, чтобы точность интегрирования выдерживалась в заданных пределах. Интегрирование с заданной точностью и автоматическим выбором шага позволяет оптимизировать вычислительный процесс при решении задач гидродинамической устойчивости. В зонах, где искомые функции изменяются резко, например вблизи границ или критической точки, для выполнения заданной точности шаг дробится, на остальных участках он автоматически увеличивается. Поскольку при изменении параметров задачи области резкого поведения решения перемещаются, использование переменной сетки вместо автоматического выбора шага весьма затруднительно.

В практических расчетах формула (2) использовалась для автоматического выбора шага двояким образом. Во-первых, задавались границы допустимой погрешности  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Если величина  $\epsilon$ , вычисленная по формуле (2), оказывалась в пределах  $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2$ , то шаг сохранялся. Если погрешность была велика ( $\epsilon > \epsilon_2$ ), то шаг дробился пополам. В противоположном случае ( $\epsilon < \epsilon_1$ ) шаг удваивался.

Второй аспект использования формулы (2) состоит в прогнозировании следующего шага интегрирования  $h_{n+1}$  по предыдущему согласно соотношению

$$h_{n+1} = h_n (\epsilon_0 / \epsilon)^{1/5}, \quad (3)$$

где  $\epsilon_0$  — заданная точность вычислений, обычно полагаемая  $10^{-3}$ ;  $\epsilon$  — величина, вычисляемая из (2). Соотношение (3) соответствует тому факту, что погрешность при-

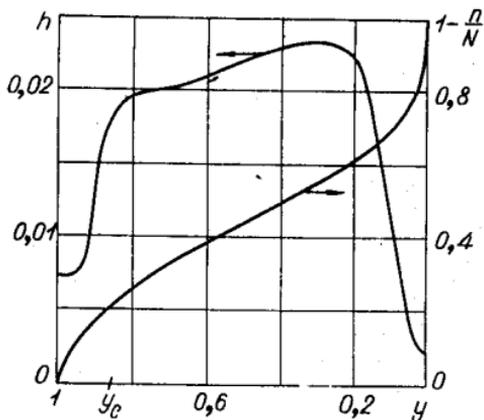


Рис. 6.

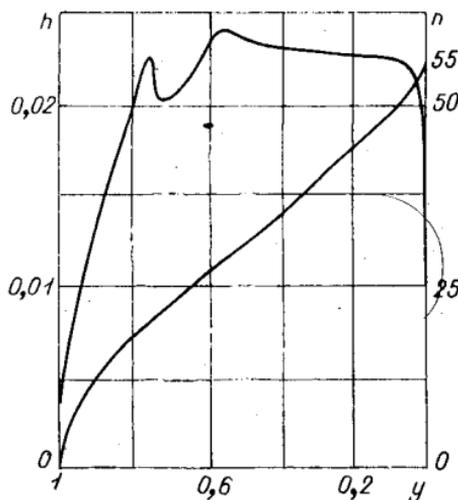


Рис. 7.

веденных формул Рунге — Кутты — Мерсена имеет порядок  $h^5$ . При использовании (3) на каждом шаге проверялась точность. Если вычисленное значение  $\epsilon$  существенно превосходило  $\epsilon_0$  (на порядок), то производился пересчет с половинным шагом, впрочем необходимость в этом возникает весьма редко.

Распределение величины шага по интервалу интегрирования отражено на рис. 6, что отвечает прямой прогонке для критических параметров течения Пуазейля. Вблизи оси малый шаг связан с установлением асимптотических зависимостей для прогоночных коэффициентов (переходный режим). В окрестности стенки шаг также резко уменьшается. При  $\epsilon = 2 \times 10^{-5}$  число шагов составляло  $N = 74$ . Распределение величины шага при обратной прогонке показано на рис. 7. Это распределение отвечает характеру пульсаций скорости.

## § 5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Задача определения собственных значений линейного оператора, строго говоря, является нелинейной из-за нелинейности характеристического уравнения. В данной работе решается еще ряд нелинейных проблем. Их

решение сводится к тому или иному итеративному процессу, на каждом шаге которого рассматривается линеаризованная задача. Чтобы такой процесс сходил, необходимо, как правило, иметь начальное приближение, достаточно близкое к решению. С этой задачей мы сталкиваемся, в частности, при отыскании нулей характеристической функции  $F(C)$ . Известно, что собственные значения, число которых в общем случае счетно, расположены в полуполосе (1.3), (1.4).

Если требуется найти собственные значения в определенной области, например при  $Y > 0$ , то число нулей целой функции  $F(C)$  можно определить по известной теореме о вычетах путем интегрирования по контуру области:  $n = (1/(2\pi i)) \oint \ln F(C) dC$ . Такой способ, в частности, использовался в работе [147]. Корни находятся последовательным сокращением области (например, методом деления пополам), пока в достаточно малом сегменте не остается только искомым корень. Хотя такой процесс всегда позволяет найти наиболее опасное собственное значение, эта процедура очень трудоемка и для массовых расчетов непригодна. Проще снять сетку значений функции  $F(C)$  в соответствующей подобласти плоскости. В нашем случае такой метод более предпочтителен, так как характеристическая функция, даваемая методами исключения или дифференциальной прогонки, является мероморфной, а не целой.

Имея таблицу значений  $F(C)$  на достаточно мелкой сетке переменных  $X, Y$ , можно построить линии нулей  $F_r(X, Y) = 0$  и  $F_i(X, Y) = 0$ . Пересечение этих линий и определяет корень  $F(C)$ . Для мероморфной функции точкой пересечения может быть и полюс, но они легко различаются по характеру поведения  $F(C)$  в окрестности точки пересечения. Примеры карт нулей  $F(C)$  дает рис. 8. Характеристическая функция вычислялась на стенке ( $y=1$ ) методом исключения по формуле (2.5). Рисунку отвечают значения  $\alpha \approx 10^2$ ,  $R = 10^4$  для  $U = 3/2(1-y^2)$ . Линии нулей  $F_r$  и  $F_i$  переплетаются, образуя характерную «веревочку». Точки пересечения отвечают попеременно то полюсу, то корню. Корни на рис. 8 помечены цифрами или буквой  $k$ . Цифрой обозначен номер спектральной ветви, на которой находится соответствующий

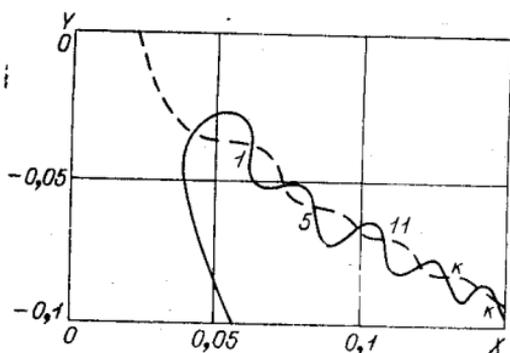


Рис. 8.

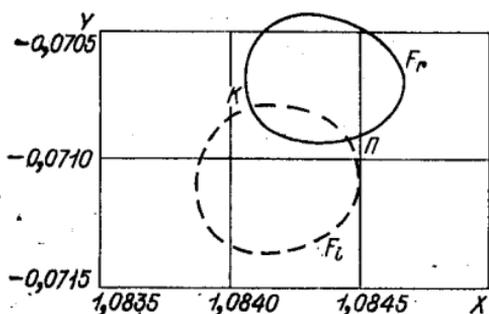


Рис. 9.

корень (нумерация проводится при малых  $\alpha$ ; цифры идут не подряд, так как остальные собственные значения приосевые и расположены при  $X \leq 1,5$ ). Полюс легко отличается от корня тем, что при приближении к полюсу величины  $F_r$ ,  $F_i$  возрастают по модулю и меняют знак, проходя через бесконечность.

Весьма своеобразная ситуация возникает, если мы при помощи той же характеристической функции попытаемся найти приосевое собственное значение. Типичная картина изображена на рис. 9. Линии нулей  $F_r$  и  $F_i$  оказываются кольцами, диаметр которых уменьша-

ется с ростом  $\alpha$ . Хотя рис. 9 отвечает сравнительно небольшому значению  $\alpha = 0,05$ , диаметр колец составляет несколько тысячных долей  $X$  и  $Y$  соответственно. Ясно, что такой корень характеристической функции найти чрезвычайно трудно. Во-первых, если заранее не знать, где он находится, то его невозможно практически обнаружить построением сеток или контурным интегрированием (рис. 9 был получен «по непрерывности», начиная с малых  $\alpha$ ). Во-вторых, близкое соседство корня и полюса приводит к тому, что итерационные методы отыскания корня, например метод секущих, перестают сходиться, если первое приближение практически не совпадает с собственным значением. Полученная ситуация вполне объяснима на основе свойств локальности. Возмущение, локализованное у оси, практически не зависит от характера

граничных условий на стенке, что и отражается в «плохом» поведении функции  $F(C)$ , которая почти ничего не «помнит» о том, что было у оси.

Картина радикально меняется, если использовать характеристическую функцию, даваемую прогонкой со стыковкой в критической точке  $y_c$ , например (3.12). Определяемая этой формулой функция  $F(C)$  должна быть равна нулю на собственном значении при любой точке стыковки  $y \in [0, 1]$ . Если построить  $|F(C)|$  как функцию от точки стыковки для некоторого  $C$ , отличающегося от собственного значения, то эта функция будет иметь максимум в критической точке  $y_c$ , что также следует из свойств локальности. С другой стороны, если выбрать  $C$  так, чтобы  $\max |F(C)|$  был достаточно мал, то при других  $y$  функция  $F(C)$  будет еще меньше. Поэтому оптимальная характеристическая функция получается при стыковке в критической точке. Картину пересечения линий нулевого уровня в этом случае характеризует рис. 10 (параметры те же, что и на рис. 9).

Но и в случае «хорошей» характеристической функции метод «сеток», конечно, не годится для определения собственного значения. Сетка может служить лишь для грубого указания окрестности  $C$ . Для достаточно точного отыскания корня следует воспользоваться одним из итерационных методов. Наиболее удобен в данном случае метод секущих [98, 169].

Разложим  $F(C)$  в ряд вблизи точки начального приближения:

$$F(C) = F(C_0) + F'(C_0)(C - C_0) + \dots$$

Считая, что расстояние до корня  $|C - C_0|$  достаточно мало, чтобы пренебречь нелинейными членами, и полагая  $F(C) = 0$ , получим  $C = C_0 - F(C_0)/F'(C_0)$ . Поскольку величина  $F(C)$  не дана в аналитическом виде, про-

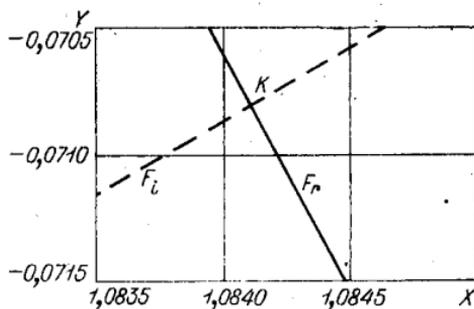


Рис. 10.

изводную  $F'(C)$  приходится аппроксимировать конечными разностями. Отсюда естественно приходим к рекуррентной формуле метода секущих:

$$C_{n+1} = C_n - (C_n - C_{n-1})F(C_n) / (F(C_n) - F(C_{n-1})). \quad (1)$$

Задавая начальные значения  $C_0$ ,  $(C_0 - C_1)$  и осуществляя итеративный процесс (1), пока  $|C_{n+1} - C_n| > \varepsilon |C_{n+1}|$ , определим корень  $F(C)$  с относительной точностью  $\varepsilon$ . Фактически, выполняя вычисления, мы следим за точностью как  $X$ , так и  $Y$  порознь. Разделяя вещественные и мнимые части (1), имеем

$$\begin{aligned} \Delta X_{n+1} &= -(A\Delta X_n - B\Delta Y_n) / \Delta; \quad \Delta Y_{n+1} = -(A\Delta Y_n + B\Delta X_n) / \Delta; \\ A &= F_{rn}\Delta F_{rn} + F_{in}\Delta F_{in}; \quad B = F_{in}\Delta F_{rn} - F_{rn}\Delta F_{in}; \quad (2) \\ \Delta &= (\Delta F_{rn})^2 + (\Delta F_{in})^2, \end{aligned}$$

где введены обозначения типа  $\Delta X_{n+1} = X_{n+1} - X_n$ . Требования сходимости обычно имели вид  $|\Delta X| < \varepsilon X$ ;  $|\Delta Y| < \varepsilon |Y| + \varepsilon_1$ , где величина  $\varepsilon$ , например, выбиралась  $10^{-3}$ , а  $\varepsilon_1 - 10^{-4}$ . В силу того, что величины  $\Delta F$  могут быть весьма малыми, при вычислении по формулам (2) определялся  $\max(|\Delta F_{rn}|, |\Delta F_{in}|)$ , а затем числители и знаменатель предварительно делились на это число. Например, при  $|\Delta F_r| > |\Delta F_i|$  знаменатель  $\Delta$  вычислялся по формуле

$$\Delta = \Delta F_{rn} + (\Delta F_{in} / \Delta F_{rn}) \Delta F_{in}.$$

Аналогичным образом вычислялись числители. Для сходимости итеративной процедуры (1) начальное приближение должно быть достаточно близко к корню. Пример плохой ситуации для отыскания корня иллюстрирует рис. 9, где полюс и корень расположены рядом. В этом случае для сходимости требуется, чтобы начальное приближение совпадало с искомым корнем не менее чем с четырьмя (!) значащими цифрами. Абсурдность такого требования еще раз подчеркивает значение правильного выбора характеристической функции. При стыковке в критической точке (см. рис. 10) область сходимости ограничена лишь расстоянием между соседними корнями  $F(C)$ .

Расчет спектра собственных значений проводился, начиная с малых значений  $\alpha$ , при которых спектр, как правило, может быть определен аналитически. Собственное значение, вычисленное при определенном  $\alpha$  (или экстраполированное по нескольким предыдущим значениям), выбиралось в качестве нулевого приближения в процедуре секущих. Метод секущих, обладая сверхлинейной сходимостью, обычно либо требовал не более 3—5 итераций для отыскания корня с заданной точностью, либо вообще не сходился, признаком чего являлось существенное изменение  $C$  в процессе итераций по сравнению с  $C_0$ . В последнем случае шаг по параметру уменьшался, до тех пор пока не восстанавливалась сходимость. Если секущие сходились чересчур быстро (за 2—3 итерации), то шаг по параметру увеличивался для экономии времени.

Наиболее употребляемым был шаг, составляющий 0,1 значения параметра. Использование квадратичной экстраполяции позволяло в благоприятных случаях удваивать значения параметра без ущерба для сходимости.

В ряде случаев требовалось отыскать не комплексное значение  $C$  как нуль мероморфной функции, а пару вещественных параметров. Например, при построении нейтральной кривой удобно считать  $C$  вещественным числом и искать  $(\alpha, C)$  при данном  $R$  или  $(C, R)$  при данном  $\alpha$ . В этом случае использовался метод двумерных секущих [169].

Пусть требуется найти нуль функций двух вещественных переменных

$$F(x, y) = 0; \quad G(x, y) = 0.$$

Разлагая  $F$  и  $G$  в ряд вблизи точки  $(x_0, y_0)$ , являющейся начальным приближением, имеем

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + (\partial F / \partial x)(x - x_0) + (\partial F / \partial y)(y - y_0) + \dots; \quad (3)$$

$$G(x, y) = G(x_0, y_0) + (\partial G / \partial x)(x - x_0) + (\partial G / \partial y)(y - y_0) + \dots$$

Пренебрегая квадратичными членами и разыскивая нуль, получим

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial F / \partial x & \partial F / \partial y \\ \partial G / \partial x & \partial G / \partial y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_0 \\ G_0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Если бы матрица Якоби была известна, то можно было бы воспользоваться итеративным процессом Ньютона, но в нашем случае ее приходится аппроксимировать конечными разностями. Для этого необходимы еще две базовые точки:  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . Подставляя в (3) вместо  $(x, y)$  координаты этих точек, получим

$$\begin{pmatrix} F_1 - F_0 & F_2 - F_0 \\ G_1 - G_0 & G_2 - G_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial F / \partial x & \partial F / \partial y \\ \partial G / \partial x & \partial G / \partial y \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, исключая матрицу Якоби, найдем

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} F_1 - F_0 & F_2 - F_0 \\ G_1 - G_0 & G_2 - G_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ G_0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

$\Delta x$   
 $\Delta F$

Формула (5) служит основой для итеративной процедуры. Рекуррентную ее запись получим, заменяя индексы 0, 1, 2 на  $n, n-1, n-2$  и  $(x, y)$  на  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ . Таким образом, по трем известным точкам находим четвертую, затем одна из точек отбрасывается, и процесс повторяется до сходимости. Надо следить, чтобы матрица  $\Delta F$  была не особой. Формула (5) без труда обобщается на случай  $n$ -мерных секущих. В качестве  $(x_0, y_0)$  обычно выбирается последняя найденная.

Иногда прибегают к разного рода модификациям метода простой итерации, имеющим более мягкие условия

сходимости. Один из таких приемов — сведение задачи к нестационарной

$$\frac{\partial u}{\partial t} + M(u) \cdot u = f$$

и решение ее методом установления по явной или неявной (с «замороженным»  $M(u)$ ) схеме. Однако метод установления, фактически представляющий собой некоторый итеративный процесс, сходится только в случае положительности оператора  $M(u)$  [157]. Другой часто применяемый прием — включение «тормоза» по формуле

$$u_{n+1} = kM^{-1}(u_n)f + (1-k)u_n.$$

Варьируя  $k$ , можно добиться облегчения условий сходимости процесса, но, как правило, этот прием не является радикальным.

Более сложен, но зато практически универсален метод Ньютона — Канторовича [98]. Его идея основана на линеаризации (6) посредством разложения  $F(u)$  в функциональный ряд в окрестности начального приближения  $u = u_0$ :

$$F(u) = F(u_0) + L(u_0)(u - u_0) + \dots,$$

где  $L(u_0)$  — линейный оператор, являющийся производной Фреше оператора  $F$  в точке  $u = u_0$ . Разыскивая нуль оператора  $F(u)$  и пренебрегая членами со старшими производными, приходим к итеративному процессу

$$L(u_n)(u_{n+1} - u_n) = -F(u_n).$$

Метод Ньютона требует, как и метод секущих, всего несколько итераций, что позволяет решать нелинейные задачи за короткое время.

## Глава II

# ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Основная цель данной главы — исследование влияния формы профиля скорости и некоторых других факторов на характеристики устойчивости изучаемого движения, необходимые для вариационного анализа проблемы турбулентности. На пути к указанной цели удалось выявить некоторые ранее неизвестные свойства малых возмущений, имеющие общее значение, и получить ряд новых результатов относительно спектров, существенной роли трехмерных возмущений, взаимодействия различных видов неустойчивости и локализации генерационной зоны. Эти важные вопросы до сих пор не нашли отражения в литературе.

### § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Рассматриваются течения вязкой несжимаемой жидкости, поля скоростей и давлений в которой описываются уравнениями Навье — Стокса

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_k} + \frac{1}{R} \Delta V_k; \quad \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0; \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (1)$$

Здесь и далее принята безразмерная форма переменных  $x_k = \{x, y, z\}$  — декартовы координаты;  $V_k(x_k, t)$  — вектор скорости;  $\mathcal{P}(x_k, t)$  — давление;  $R = V_0 l_0 / \nu$  — критерий Рейнольдса;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $V_0$  и  $l_0$  — характерные масштабы скорости и длины, выбор которых каждый раз будет специально оговори-

ваться. Плотность жидкости всюду принята равной единице.

Пусть  $\{U_k, P\}$  — стационарное решение системы (1). Чтобы сделать заключение о его устойчивости, ищется другое решение:  $V_k = U_k + v_k$ ;  $\mathcal{P} = P + p$ . Добавочное поле  $\{v_k, p\}$  называется возмущением. Уравнения для него следуют из (1):

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{R} \Delta v_k;$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$

Течение осуществляется в области  $\Omega$ , на границе которой обычно  $v_k = 0$ . Если  $v_j v_j \equiv (v_j)^2 \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то решение асимптотически устойчиво, по Ляпунову.

Умножение (2) на  $v_k$  и интегрирование по области  $\Omega$  дает уравнение для кинетической энергии возмущений

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v_k)^2 d\Omega = - \int_{\Omega} v_k v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} d\Omega - \frac{1}{R} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega, \quad (3)$$

которое играет важную роль в теории гидродинамической устойчивости. Первый член правой части характеризует обмен энергией между возмущением и основным потоком, второй — вязкую диссипацию.

В случае бесконечно малых возмущений нелинейным членом в (2) пренебрегают, в результате чего получаются линеаризованные уравнения для малых возмущений

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{R} \Delta v_k; \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (4)$$

Строгое обоснование процедуры линеаризации было сделано сравнительно недавно Юдовичем [246], который средствами функционального анализа показал, что решение  $\{U_i, P\}$ , устойчивое в смысле уравнений (4), устойчиво и к конечным достаточно малым возмущениям и, наоборот, неустойчивость к бесконечно малым

возмущениям влечет за собой неустойчивость к возмущениям конечным. В силу этих утверждений анализ системы (4) имеет физический смысл.

Линейность системы (4) позволяет свести задачу Коши для произвольного возмущения к более простой спектральной задаче. Необходимая для этого полнота системы собственных функций доказана в работе [246] (см. также [315, 515]).

Пусть  $U_i := \{U(y), V, 0\}$ . Тогда уравнения (2) допускают решение в виде гармонической волны

$$\{v_x, v_y, v_z, p\} = \text{Re}(\{u, v, w, q\} \exp[i\alpha(x - Ct) + i\beta z]), \quad (5)$$

где  $u, v, w, q$  — комплекснозначные амплитуды, зависящие только от  $y$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  — вещественные волновые числа;  $C = X + iY$  — комплексная фазовая скорость волны;  $X$  — действительная фазовая скорость;  $Y$  — декремент затухания возмущения ( $Y < 0$ ) или инкремент его нарастания ( $Y > 0$ ).

Сказанное соответствует следующей постановке задачи: в начальный момент  $t = 0$  на основное течение наложено синусоидальное поле возмущений, требуется проследить его эволюцию во времени. Возможна и другая постановка задачи, которая излагается в § 8 настоящей главы.

Уравнения для амплитуд получаются подстановкой (5) в (4), что равносильно преобразованию Фурье по переменным  $x, z$  и  $t$ :

$$\begin{cases} i\alpha(U - C)u + Vu' + U'v = -i\alpha q + R^{-1}(u'' - k^2u); \\ i\alpha(U - C)v + Vv' = -q' + R^{-1}(v'' - k^2v); \\ i\alpha(U - C)w + Vw' = -i\beta q + R^{-1}(w'' - k^2w); \\ i\alpha u + i\beta w + v' = 0; \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2. \end{cases} \quad (6)$$

Если первое уравнение системы (6) умножить на  $\alpha$ , третье — на  $\beta$  и сложить, то после введения обозначений  $\hat{k}u = \alpha u + \beta w$ ;  $\hat{V} = Vk/\hat{\alpha}$ ;  $\hat{q} = qk/\alpha$ ;  $\hat{R} = R\alpha/k$  система (6) примет вид

$$\begin{cases} ik(U - C)\hat{u} + \hat{V}\hat{u}' + U'v = -ik\hat{q} + \hat{R}^{-1}(\hat{u}'' - k^2\hat{u}); \\ ik(U - C)v + \hat{V}v' = -\hat{q}' + \hat{R}^{-1}(v'' - k^2v); \\ ik\hat{u} + v' = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) получается из (6), если в последней положить  $\beta=0$ ,  $\omega=0$  и обозначить  $\alpha \rightarrow k$ ,  $R \rightarrow \hat{R}$ ,  $V \rightarrow \hat{V}$ . Таким образом, спектральная задача о трехмерных возмущениях приводится к эквивалентной двумерной задаче при эффективных значениях  $\alpha$ ,  $R$  и  $V$ . Это преобразование Сквайра [536] существенно упрощает анализ устойчивости параллельных течений.

Из неравенства  $R \leq \hat{R}$  для случая  $V=0$  следует теорема Сквайра о том, что неустойчивость к двумерным возмущениям по сравнению с трехмерными проявляется при меньших числах Рейнольдса.

После исключения давления из системы (7) следует уравнение Орра — Зоммерфельда (название принадлежит Линю [439])

$$v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v = i\alpha R[(U-C)(v'' - \alpha^2 v) - U''v] + + RV(v'' - \alpha^2 v). \quad (8)$$

Здесь учтено, что для плоскопараллельных течений в силу уравнения неразрывности  $V = \text{const}$ . Обычно полагают, что  $V=0$ . Тогда получается собственно уравнение Орра — Зоммерфельда

$$v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v = i\alpha R[(U-C)(v'' - \alpha^2 v) - U''v]. \quad (9)$$

При течении между жесткими пластинами  $y = \pm 1$  условия непроницаемости и прилипания дают граничные условия.

$$v = v' = 0 \text{ при } y = \pm 1. \quad (10)$$

Для невязкого течения при  $R = \infty$  из (9) получается уравнение Релея

$$(U-C)(v'' - \alpha^2 v) - U''v = 0, \quad (11)$$

для которого ставятся только условия непроницаемости  $v(\pm 1) = 0$ .

Для уравнения (11) известна важная теорема Релея [497], касающаяся роли точек перегиба на профиле  $U(y)$ : для неустойчивости течения требуется, чтобы в некоторой точке интервала  $(-1, 1)$   $U'' = 0$ . Более сильные необходимые условия были получены в работах [77, 282, 374]. Это условие не является достаточным. Линем

[439] и Арнольдом [9] построены устойчивые профили с точками перегиба. Подобный пример будет приведен при рассмотрении МГД-течения Куэтта.

Интересно отметить, что при наличии поперечной скорости  $V$  порядок невязкого уравнения повышается по сравнению с (10), как это следует из (8):

$$i\alpha[(U-C)(v''-\alpha^2v)-U''v]+V(v''-\alpha^2v)'=0, \quad (11a)$$

и условий непроницаемости для пульсаций уже недостаточно, что соответствует, например, возможности задания произвольного потока завихренности, втекающего в область движения через стенку. Подобная постановка согласуется с теоремой Юдовича об однозначной разрешимости нестационарных уравнений Эйлера [127], согласно которой на границе области кроме нормальной компоненты скорости должен быть задан вектор вихря на участках втекания.

Если искать такое решение (11a), которое является предельным для задачи (8), (10) при  $R \rightarrow \infty$ , то при  $V > 0$  следует поставить условия  $v(\pm 1) = 0$  и  $v'(-1) = 0$ . В случае  $U = \text{const}$  этим условиям удовлетворяет решение уравнения (11a) вида

$$v = A_1 e^{\alpha v} + A_2 e^{-\alpha v} + A_3 e^{-k v}; \quad k = i\alpha(U-C)/V. \quad (12)$$

Легко видеть, что характеристическое уравнение

$$(k+\alpha)e^{2(k-\alpha)} - (k-\alpha)e^{2(k+\alpha)} = 2\alpha$$

имеет два корня  $k = \pm\alpha$ , поэтому решение должно быть модифицировано:

$$v = A_1 e^{\alpha v} + A_2 e^{-\alpha v} + A_3 v e^{-k v}; \quad k = \pm\alpha.$$

В случае  $k = \alpha$  характеристическое уравнение не имеет решений, кроме  $\alpha = 0$ ; в случае  $k = -\alpha$  оно выполняется тождественно при любых  $\alpha > 0$ . Следовательно,

$$C = U - iV.$$

Наличие поперечной скорости делает нейтрально устойчивый профиль  $U = \text{const}$  устойчивым. Затухание возмущений объясняется просто их выносом из области течения. Факт стабилизации течения при решении полного уравнения (8) отмечается в работе [364].

Современная линейная теория гидродинамической устойчивости — весьма широкое поле деятельности для исследователей. Работы в этой области начинаются трудами Орра [473] и Зоммерфельда [529], получивших основное уравнение для амплитуд гармонических возмущений. Открытие вязкой неустойчивости связано с именами Гейзенберга [369], Толлмина [553], Шлихтинга [518]. Сквайр [536] показал ведущую роль двумерных возмущений. Линь [439] усовершенствовал асимптотический метод и подтвердил существование вязкой неустойчивости течения в канале. Достаточно подробный обзор работ по линейной теории устойчивости можно найти в монографиях [15, 137, 163, 238]. В книге Бетчова и Криминале [15] библиография насчитывает 800 наименований. После выхода этой книги число работ возросло в несколько раз. Это делает невозможным сколько-нибудь детальный обзор в рамках данной монографии. Поэтому мы ограничимся лишь указанием основных направлений исследований.

Одно из направлений развития линейной теории связано с ее математическим обоснованием. Сюда можно отнести оправдание метода линеаризации уравнений Навье — Стокса для малых возмущений, доказательства полноты системы собственных функций спектральной задачи и общие результаты о границах и свойствах спектра. Это направление представлено работами [209, 246, 250, 299, 315, 345, 400, 401, 515, 545, 578, 579], к которым следует добавить обзор Ладыженской [428] и работы [136, 224, 236].

Большое число исследований посвящено анализу устойчивости течений в пограничных слоях. Недавно выпущена книга [135], где приведены таблицы параметров задачи устойчивости для семейства течений с профилями скорости Фокнера — Скэн, Польгаузена и течений на скользящем крыле. Сюда же относятся работы [38, 41, 75, 96, 215, 258, 446, 566, 570, 576].

Усилился интерес к проблеме учета неоднородности течения в пограничном слое [264, 265, 288, 378, 379, 418, 424, 441, 465, 568], исследованию устойчивости непараллельных [11, 155, 178, 316, 317, 347] и нестационарных [42, 153, 287, 413] течений.

В связи с проблемой управления пограничным слоем анализируются вопросы влияния упругих свойств границ на устойчивость потока [12]. Это направление получило дальнейшее развитие [31, 40, 207, 208, 341, 354, 452].

В последнее время расширился круг исследований по устойчивости жидких пленок [51, 164, 179, 205, 262, 270, 393, 421, 440, 449, 577], что связано с их широким применением в химической технологии. К ним примыкают работы по двухслойным течениям [109, 257, 460, 464]. Из большого числа работ по устойчивости стратифицированных течений упомянем лишь несколько последних [331, 335—337, 489, 495, 555].

Растет число работ по устойчивости течений неньютоновских жидкостей [156, 261, 572], что определяется запросами не только техники, но и медицины.

Наконец, большой раздел теории гидродинамической устойчивости связан с изучением термогравитационной конвекции. В нашей стране эта тематика широко разрабатывается пермской группой исследователей. Богатый материал представлен в монографии Гершуни и Жуховицкого [47]. Ряд интересных исследований как экспериментального, так и теоретического плана выполнен Кирдяшкиным [101].

Даже этот краткий перечень показывает размах исследований и многообразие задач, решаемых в рамках линейной теории гидродинамической устойчивости.

Данная глава не преследует цели охватить или даже просто затронуть столь широкие приложения теории. Внимание в основном сосредоточено на устойчивости параллельных и осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости в изотермических условиях, поскольку и в этом простейшем случае удастся выявить основные качественные свойства поведения малых возмущений. Более того, важнейшие характерные особенности обнаруживаются уже при анализе устойчивости простейших решений уравнений Навье—Стокса—плоских течений Куэтта и Пуазейля, которые являются базовыми в теории гидродинамической устойчивости, так как отражают возможности и ограниченность линейного анализа.

## § 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

Течение между двумя параллельными плоскостями, движущимися в противоположных направлениях, называют, следуя Гейзенбергу [369], плоским течением Куэтта. Оно характеризуется профилем скорости

$$U=y; \quad -1 \leq y \leq 1. \quad (1)$$

Такая запись предполагает, что в качестве масштаба скорости взята полусумма скоростей пластин, а в качестве масштаба длины — половина зазора между ними.

Плоское течение Куэтта было первой моделью для теоретических исследований по гидродинамической устойчивости [376, 412, 453, 473, 498, 529]. Общее решение уравнения Орра — Зоммерфельда в данном случае может быть найдено аналитически через специальные функции. Действительно, обозначая  $\theta = v'' - \alpha^2 v$ , из (9) получим

$$\theta'' - [\alpha^2 + i\alpha R(y-C)]\theta = 0. \quad (2)$$

После введения новой переменной  $z = (i\alpha R)^{-2/3} [\alpha^2 + i\alpha R(y-C)]$  это уравнение сводится к уравнению Эйри

$$d^2\theta/dz^2 + z\theta = 0; \quad \theta_{1,2} = \sqrt{z} \bar{H}_{\pm 1/3}(2/3 \cdot z^{3/2}).$$

Использование граничных условий приводит к характеристическому уравнению

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \operatorname{sh} \alpha(1-y) \theta_1(z) dy \int_{-1}^1 \operatorname{ch} \alpha(1-y) \theta_2(z) dy = \\ & = \int_{-1}^1 \operatorname{ch} \alpha(1-y) \theta_1(z) dy \int_{-1}^1 \operatorname{sh} \alpha(1-y) \theta_2(z) dy. \quad (3) \end{aligned}$$

Хотя это уравнение было получено еще Орром и Зоммерфельдом и исследовалось затем Мизесом, Хопфом и Релеем, сделать определенные выводы об устойчивости или неустойчивости течения Куэтта не удалось. Релей охарактеризовал эту проблему как необычайно трудную, а Ламб [128] еще в 1924 г. отметил, что большинство авторов склоняется к мнению об устойчивости

течения Куэтта, но этот вывод «настолько же возможен, насколько его трудно продемонстрировать». Первые попытки численно рассчитать спектр собственных значений были предприняты в статьях [530, 531]. Асимптотический анализ проведен в [356, 508, 563, 582].

Характеристическое уравнение (3) было эффективно исследовано Диким [78], который, используя разложение решения в ряд, показал, что монотонные возмущения ( $X=0$ ) могут только затухать. Этот результат впоследствии был несколько расширен [177].

Выборочные численные расчеты на ЭВМ для некоторых значений  $\alpha$  и  $R$  [16, 18, 313, 339, 340, 363, 486] дали дополнительный аргумент в пользу устойчивости течения Куэтта, но не позволили дать ответ в целом. Это было сделано в работах [240—242], где проведено полное численное исследование спектра при всех значениях  $\alpha$  и  $R$ .

На рис. 11 отражены результаты расчетов первых восьми мод  $C_n = X_n + iY_n$ ,  $n=1, 2, \dots, 8$ , для  $R=10^4$

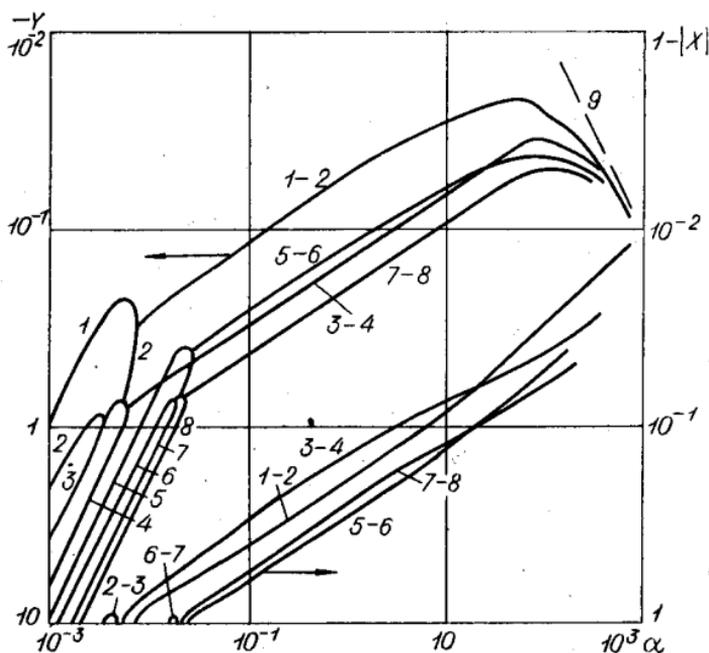


Рис. 11.

в диапазоне  $10^{-3} \leq \alpha \leq 10^3$ . Нумерация проведена по возрастанию модуля декремента  $|Y_n|$  при малых значениях  $\alpha$  в соответствии с (I.1.7). При достаточно малых  $\alpha$  численные результаты хорошо согласуются с асимптотическими зависимостями (I.1.7) и возмущения ведут себя во времени монотонно ( $X=0$ ). Кстати, это непосредственно следует из (I.1.5), если учесть, что при  $\alpha=0$  собственные функции  $v$  симметричны, а профиль  $U$  антисимметричен по  $y$ .

Свойство монотонности сохраняется и в определенном диапазоне  $\alpha > 0$ , причем вещественные и мнимые части собственных функций обладают альтернативными свойствами симметрии: если величина  $v_r$  симметрична, то  $v_i$  антисимметрична и наоборот. Но при некотором  $\alpha_n = \alpha_n^*$  собственные значения попарно сливаются, и при  $\alpha_n > \alpha_n^*$  образуются комплексно-сопряженные пары  $iC$  и  $(iC)^*$  с равными, но противоположными по знаку фазовыми скоростями  $X$  и равными декрементами  $Y$ . Собственные функции теряют свойства симметрии. Физически это означает, что в какой-то момент из двух стоячих затухающих волн возникает пара волн, бегущих в противоположных направлениях вблизи соответствующих пластин. Красивый и неожиданный эффект!

Картина перестройки спектра (см. рис. 11) имеет довольно сложный характер. Сначала при  $\alpha=0,0038$  сливаются второе и третье собственные значения. Фазовая скорость возникающих бегущих волн с ростом  $\alpha$  сначала увеличивается, а затем уменьшается до нуля во второй точке кратности при  $\alpha=0,0057$ , после чего возмущения вновь перестают осциллировать. Затем третье и четвертое собственные значения после точки кратности при  $\alpha=0,006$  образуют сопряженную пару, а несколько позднее при  $\alpha=0,008$  это происходит с первым и вторым собственными значениями. Далее с ростом  $\alpha$  фазовые скорости у этой четверки монотонно возрастают, стремясь к скорости стенок, а декременты  $Y_{1,2}$  и  $Y_{3,4}$  сначала растут, достигая максимальных значений  $-0,021$  и  $-0,033$  при  $\alpha=59$  и  $105$  соответственно, а затем убывают, выходя на асимптотическую

зависимость (I.1.11)  $Y = -\alpha/R$ . Аналогично ведет себя и следующая четверка собственных значений. С дальнейшим увеличением спектрального номера  $n$  четверки собственных значений смещаются в сторону больших  $\alpha$  и меньших  $Y$ , так что приведенные данные говорят об устойчивости течения Куэтта при  $R = 10^4$ . Наименее затухающим возмущениям отвечает первая пара собственных значений, причем декремент затухания  $\alpha Y_{1,2}$  заметно удален от следующих значений. Это позволяет сосредоточить внимание на первой спектральной моде.

Зависимости первого собственного значения от  $\alpha$  при  $R = 5; 10^2; 10^3; 10^4$  показаны на рис. 12. Изломы на кривых отвечают точкам кратности. Штрих-пунктирными линиями нанесены асимптотические зависимости для малых и больших значений  $\alpha$ . На рис. 13 дана спектральная картина на плоскости  $S$ .

Зависимость  $Y(\alpha)$  в общем случае имеет два локальных максимума. Первый достигается в зоне монотонных возмущений ( $X=0$ ). Геометрическое место этих максимумов показано на рис. 12 пунктирной ли-

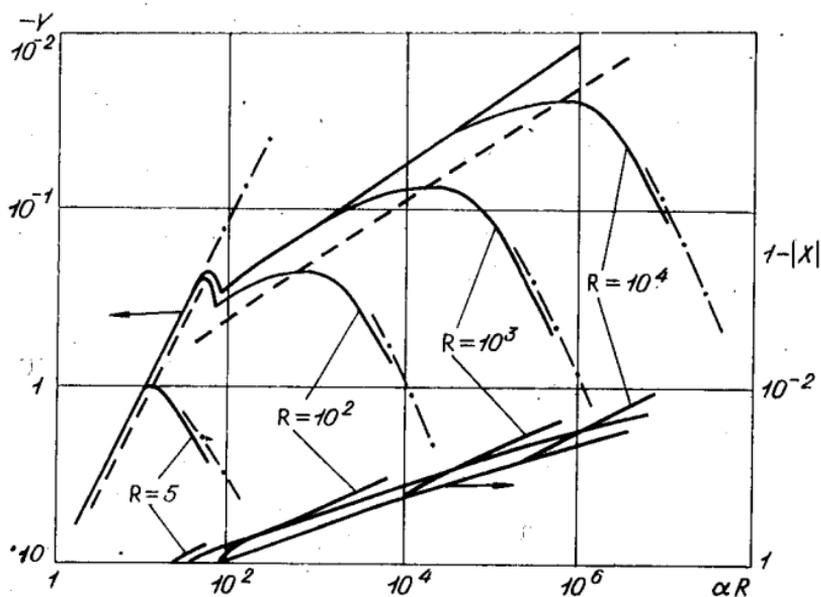


Рис. 12.

нией. Во всем рассматриваемом диапазоне с точностью до трех значащих цифр выполняется соотношение  $\max Y = -4\pi/\alpha$

$/R \alpha_{\max}$ , причем  $\alpha_{\max}$  изменяется от 2,81 при  $R=0$  до нуля при  $R \rightarrow \infty$ , так что  $\alpha R \rightarrow 55,2$ . Таким образом, для монотонных возмущений  $Y < -0,226$  при всех числах Рейнольдса, что согласуется с результатом Дикого.

Второй максимум возникает впервые при  $R=8$  в точке излома и с ростом  $R$  смещается в сторону больших  $\alpha$ . Расчеты, проведенные в диапазоне  $8 < R < 8 \cdot 10^4$ , показали, что при  $\alpha R > 100$  справедливо соотношение

$$C = \pm 1 + (\alpha R)^{-1/3} (\pm 3 - 1,86i); \quad \alpha_{\max} = 0,632\sqrt{R}. \quad (4)$$

Эти результаты хотя и не имеют силы строгого доказательства, но практически исчерпывающим образом свидетельствуют об устойчивости течения Куэтта к малым возмущениям. Строгое доказательство удалось получить Романову [184, 185] на основе анализа уравнения (3).

В работах Галлахера [338] и Дэви [306] дублируются материалы [241]. К сожалению, такое дублирование нередко можно встретить в зарубежных публикациях, что свидетельствует о слабом знакомстве с работами советских авторов.

Учитывая полученные результаты, остановимся на вопросе о связи вязкой и невязкой постановки задачи. Кейз [281, 283] и Дикий [77] показали, что в чисто невязком случае спектр состоит из дискретной и непрерывной частей, причем для задачи с начальными данными вклад непрерывной части спектра исчезает с ростом времени. Но спектр чисто невязкой задачи и предельный спектр вязкой при  $R \rightarrow \infty$  не совпадают даже в

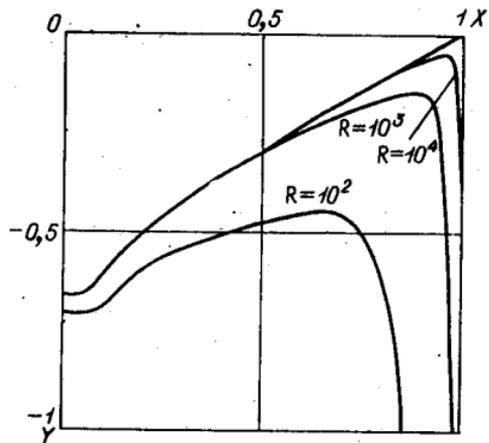


Рис. 13.

дискретной части. Как показал Линь [137], такое совпадение наблюдается только для нарастающих или нейтральных возмущений, тогда как в данном случае мы имеем дело только с затухающими возмущениями.

Зафиксируем значение  $\alpha R = \alpha_1 R_1$  в зависимости (4) и рассмотрим семейство трехмерных возмущений с  $k = \alpha_1$ . Для всего этого семейства в силу преобразования Сквайра собственное значение будет одним и тем же. Устремим  $R \rightarrow \infty$ , тогда  $\alpha = \alpha_1 R_1 / R \rightarrow 0$ ;  $\beta \rightarrow k$ . Таким образом, трехмерному возмущению с волновыми числами  $\alpha = 0$ ;  $\beta = \alpha_1$  при  $R = \infty$  соответствует собственное значение с  $|X| < 1$  и  $Y < 0$ . С другой стороны, чисто невязкая задача для течения Куэтта имеет только вещественный спектр [281, 473], что свидетельствует о несовпадении невязкого и предельного вязкого спектров. Впрочем, в этом нет ничего удивительного, поскольку предельный переход  $R \rightarrow \infty$  в уравнении (1.9) осуществляется при  $\alpha R \rightarrow \text{const}$  и приводит не к уравнению (2.11), а снова к уравнению (2.9) с заменой  $\alpha$  на  $\beta$ .

### § 3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ АСПЕКТЫ ГЕНЕРАЦИИ ПУЛЬСАЦИОННОЙ ЭНЕРГИИ

Безуспешность попыток обнаружить линейную неустойчивость течения Куэтта вызвала в свое время некоторое предубеждение против линейной теории вообще. Например, в работе [471] утверждалась невозможность получить неустойчивость в рамках линейной теории для любых плоскопараллельных течений с выпуклым профилем скорости. Однако такое мнение было опровергнуто исследованиями Гейзенберга, Толлмина, Шлихтинга, Линя, когда была обнаружена неустойчивость плоского течения Пуазейля и течения Блазиуса в пограничном слое. Данные линейной теории в последнем случае получили подтверждение в опытах Шубауэра и Скремстеда [519, 520]. Еще раньше Тейлором [551] было получено прекрасное согласование линейной

теории и экспериментальных данных о неустойчивости течения между вращающимися цилиндрами.

Течение в пограничном слое, хотя и более важное в прикладном отношении, в меньшей степени может служить удачной теоретической моделью в силу своей неоднородности, неограниченности области течения и отсутствия аналитического решения для профиля скорости. Плоское течение Пуазейля анализируется более легко и строго, поэтому в теории гидродинамической устойчивости оно служит базовым в том смысле, что на его основе строятся расширения теории для изучения влияния различных факторов, таких, как упругие свойства стенок, неньютоновость жидкости, слабая периодичность основного течения во времени и в пространстве, нелинейные эффекты и т. п. На примере плоского течения Пуазейля отрабатывались и апробировались асимптотические и численные методы теории гидродинамической устойчивости, в силу чего библиография по проблеме весьма обширна. Обзор ранних работ можно найти в книгах Линя [137], Бетчова и Криминале [15]. Наряду с уже упомянутым обзором Рейда [500] следует отметить работу Рейнольдса и Поттера [506], где численными методами получены весьма точные данные относительно носика нейтральной кривой.

Детальный анализ спектра, предпринятый в работах [66, 69, 202, 244, 245], помогает выяснить некоторые общие свойства поведения малых возмущений. Так, установлено, что неустойчивость течения Пуазейля  $U=3/2(1-y^2)$  связана только с первой спектральной модой, отвечающей симметричным возмущениям  $v(-y)=v(y)$ . На рис. 14 показаны собственные значения для этих возмущений во всем диапазоне волновых чисел и при значениях критерия  $R=10^2; 10^3; 10^4$ . Штрих-пунктирными линиями нанесены асимптотические зависимости при малых  $\alpha$  ( $Y=-\pi^2/\alpha R$ ) и при больших  $\alpha$  ( $Y=-\alpha/R$ ). При фиксированном  $R$  функция  $Y(\alpha)$  имеет в общем случае два локальных максимума. Один из них достигается при  $\alpha \leq 1$  и в области малых  $R$  отвечает зависимости  $\max_{\alpha} Y = -13/(\alpha R)$ . Но с ростом  $R$  указанная зависимость нарушается и максимум

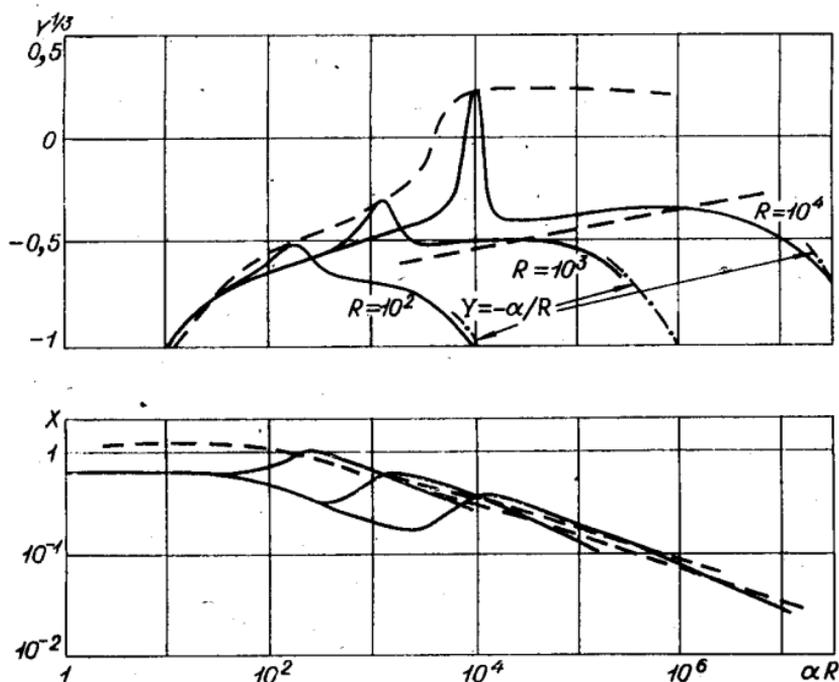


Рис. 14.

пересекает ось  $Y=0$  при  $R=3848$ , которое и является критическим числом Рейнольдса. С дальнейшим ростом  $R$  максимум сначала возрастает, достигая при  $R=74\,000$  значения  $Y=0,0158$  ( $\alpha=0,678$ ;  $X=0,19$ ), а затем уменьшается до нуля, оставаясь положительным. Другой локальный максимум существует при  $R \geq 164$ , но он расположен значительно ниже и не порождает неустойчивости. С ростом числа Рейнольдса он уходит в коротковолновую область приблизительно по закону  $\alpha \sim \sqrt{R}$ .

При больших  $\alpha R$  вдоль максимумов выполняются асимптотические соотношения

$$C = 7,5(\alpha R)^{-1/3} + 1/\pi i (\alpha R)^{-1/4}; \quad (1)$$

$$C = \alpha R^{-1/3} (2\pi - 3,86i).$$

Пересечения зависимостей  $Y(\alpha)$  с осью  $Y=0$  при различных  $R$  на плоскости  $(R, \alpha)$  формируют нейтральную

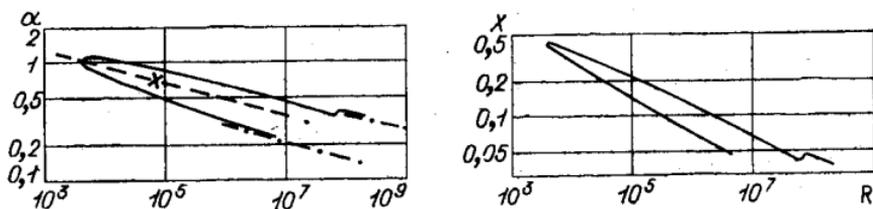


Рис. 15.

кривую (рис. 15). Сплошной линией нанесены результаты численных расчетов, которые были проведены для верхней ветви до значения  $R=0,25 \cdot 10^9$ , для нижней — до  $R=0,29 \cdot 10^7$ . Такой широкий диапазон по числам Рейнольдса был охвачен, во-первых, для того, чтобы продемонстрировать возможности численного метода, во-вторых, только при столь больших значениях  $R$  верхняя и нижняя ветви нейтральной кривой выходят на асимптотические зависимости Линя

$$\alpha = (400/R)^{1/11}; \quad \alpha = (142/R)^{1/7}. \quad (2)$$

Расчеты хорошо согласуются с численными результатами других авторов [506] в области носика нейтральной кривой и с результатами асимптотического анализа [500] при больших  $R$ . Численный расчет, в частности, подтверждает прогноз асимптотической теории о существовании на верхней ветке ступеньки при  $R=0,71 \cdot 10^8$  для зависимостей  $\alpha(R)$  и  $X(R)$ . Пунктиром на рис. 15 нанесены значения  $\alpha$ , отвечающие  $\max Y$  при фиксированном  $R$ . Они хорошо аппроксимируются зависимостью  $\alpha = 10/3R^{-1/7}$ . Крестиком отмечена точка, где  $Y$  максимален.

В силу преобразования Сквайра при анализе поведения трехмерных возмущений нет необходимости проводить дополнительные машинные расчеты. Нейтральной кривой на плоскости  $(\alpha, R)$  в пространстве  $(\alpha, \beta, R)$  будет соответствовать некоторая поверхность. Сечения этой поверхности [245] при числах  $R=4000; 10^4; 10^5$  и  $10^7$  показаны на рис. 16 кривыми 1—4. Кривые строятся следующим способом. Произвольная точка на нейтральной кривой определяет три параметра:

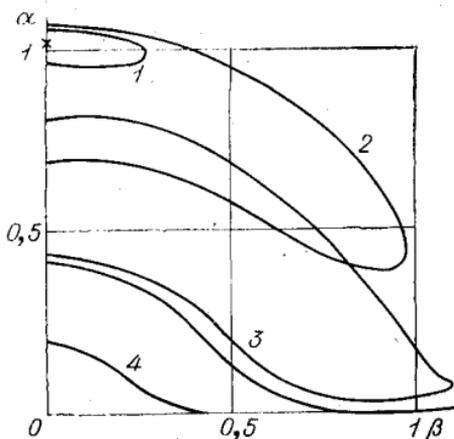


Рис. 16.

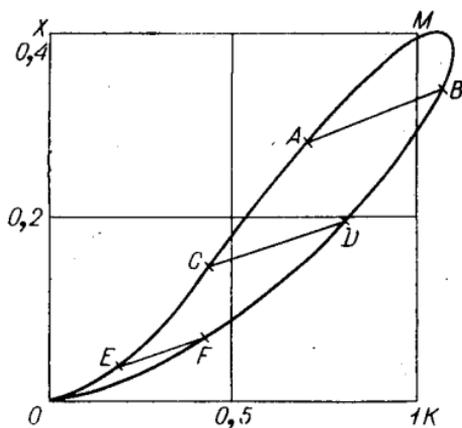


Рис. 17.

$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  $X$  и  $\hat{R} = \alpha R/k$ . Пусть  $R$  зафиксировано, тогда для любого  $\hat{R}$  находим  $\alpha = k R/\hat{R}$  и  $\beta = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ , что и определяет зависимости. Крестиком отмечен носик поверхности, соответствующий критическому числу Рейнольдса  $R_* = 3848$ ;  $\alpha = 1,0204$ ;  $\beta = 0$ ;  $X = 0,3960$ . Каждой точке  $(\alpha_1, R_1)$  нейтральной кривой соответствует семейство трехмерных колебаний, определяемое соотношениями

$$\alpha = \alpha_1 R_1 / R; \quad \beta = \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha^2}. \quad \parallel \quad (3)$$

Собственное значение  $C$  вдоль этого семейства не меняется. Если при произвольно выбранных значениях  $\alpha_1$  и  $R_1$   $R \rightarrow \infty$ , то  $\alpha \rightarrow 0$ , а  $\beta \rightarrow \alpha_1$ . Поэтому нейтральная поверхность при  $R \rightarrow \infty$  вырождается в «шлейф», спадающий к плоскости  $\alpha = 0$  в соответствии с асимптотами Линя (2), но имеющий конечную ширину  $-\alpha_{\max} \leq \beta \leq \alpha_{\max}$ , где  $\alpha_{\max}$ , равное 1, — максимально возможное волновое число для двумерных нейтральных колебаний.

Фазовые скорости нейтральных трехмерных волн показаны на рис. 17. Следует подчеркнуть, что параметр  $\alpha R$  на кривой (и внутри) конечен и вязкие члены в уравнении Орра — Зоммерфельда не исчезают. Внутри кривой  $Y > 0$  и достигает своего максимального значения, равного 0,0158. Отсюда следует, что собственные значения вязкой задачи при  $R \rightarrow \infty$  не совпадают с чисто не-

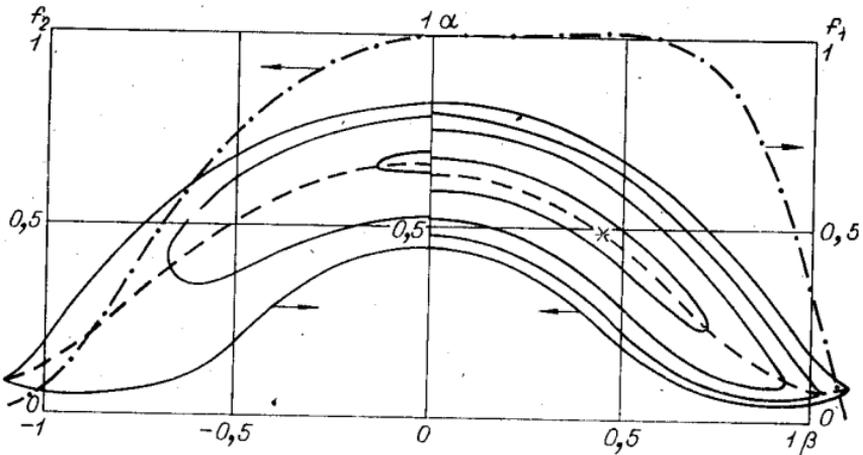


Рис. 18.

вязкими даже для нарастающих трехмерных возмущений в отличие от известной альтернативы Линя [134] для двумерного случая. Следует, однако, отметить, что инкременты нарастания возмущений, равные не  $Y$ , а  $\alpha Y$ , стремятся к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . В работе [564] был поставлен вопрос, существует ли число Рейнольдса, при котором трехмерные возмущения обладают максимальным инкрементом  $\alpha Y$ ? На этот вопрос следует дать отрицательный ответ.

На рис. 18 в первом квадранте (на рис. 16—18 оси координат являются осями симметрии) изображены линии уровня  $Y=0; 0,005; 0,010; 0,015$  для  $R=10^5$ . Пунктирная линия отвечает «хребту»  $\max_{\alpha} Y(\beta)$ , а звездочка — вершине  $Y=0,0158$ ; значения  $f_1 = \max_{\alpha} Y(\beta) / \max_{\alpha} Y(0)$  нанесены штрих-пунктиром. Возрастание величины  $Y$  вдоль хребта слишком невелико, чтобы компенсировать уменьшение  $\alpha$ , поэтому максимальному значению  $\alpha Y$  соответствует двумерное колебание  $\beta=0$ . В левой части рис. 18 показаны линии уровня  $\alpha Y=0; 0,005; 0,010$ , а пунктиром отмечено положение «хребта»  $\max_{\alpha} \alpha Y(\beta)$ ; штрих-пунктирной линией нанесены значения  $f_2 = \max_{\alpha} \alpha Y(\beta) / \max_{\alpha} \alpha Y(0)$ .

Аналогичная картина имеет место и при больших числах Рейнольдса, причем всегда максимум инкремента отвечает двумерным возмущениям. Но, как будет показано далее, при больших числах Рейнольдса, даже имея нулевой линейный инкремент, малые возмущения будут расти во времени из-за резонансных нелинейных взаимодействий. При этом существенную роль играет трехмерность возмущений.

Если рассмотреть ламинарное течение при очень больших критических числах Рейнольдса (а формально такое всегда существует), то вносимое возмущение вызовет развитие неустойчивости и генерацию турбулентности первоначально в определенном диапазоне волновых чисел и в определенной подобласти течения, причем возбуждение будет связано в основном с трехмерными возмущениями. На рис. 17 представлен этот генерационный диапазон для плоского течения Пуазейля. Кривая  $OCMDO$  соответствует дисперсионной связи между фазовой скоростью  $X$  и модулем волнового вектора  $k$  для нейтральных колебаний. Интересно отметить, что эта связь справедлива для любых трехмерных колебаний при произвольном числе Рейнольдса. Действительно, трехмерное колебание с параметрами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $X$  вследствие преобразования Сквайра эквивалентно двумерному, имеющему параметры  $\alpha_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ;  $R_1 = \alpha R / \alpha_1$  при том же значении  $X$ . Но двумерные колебания на нейтральной кривой связаны зависимостями  $\alpha_1 = f(R_1)$ ;  $X = g(R_1)$ . Исключая  $R_1$ , получаем дисперсионную связь  $X = F(k)$ , которая и показана на рис. 17. Каждая точка на кривой отвечает определенному значению  $\alpha R$ . С ростом числа Рейнольдса генерационный диапазон заполняется постепенно. Первоначально при критическом значении  $R = 3848$  появляется единственная точка  $M$ . При  $R = 10^4$  областью генерации служит фигура  $AMBA$ . Соответственно  $CMDC$ ,  $EMFE$  и  $OCMDO$  — области генерации при  $R = 10^5$ ;  $10^7$  и  $\infty$ .

Фазовые скорости заключены в диапазоне  $0 < X \leq \leq 0,4$ . Следовательно, генерация турбулентности происходит не во всей области течения, а только в определенной пристенной зоне, величина которой определяется положением критического слоя  $y_c$ , где фазовая

скорость совпадает с местной скоростью потока:  $U(y_c) = X$ . В силу монотонности функции  $U(y)$  чем больше значение  $X$ , тем дальше от стенки расположен критический слой  $y_c$ . Область генерации может быть найдена с помощью уравнения энергии (2.3), которое для нейтральных колебаний ( $dE/dt=0$ ) можно записать в виде

$$\int_0^1 \Phi(y) dy = 0;$$

$$\Phi = 3\gamma\tau - R^{-1} [ |u'|^2 + |v'|^2 + |w'|^2 + k^2(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2) ]; \tau = \overline{v_x v_y} = u_r v_r + u_i v_i. \quad (4)$$

Здесь  $\tau$  — напряжения Рейнольдса; чертой обозначено усреднение по времени или  $x$ , что для нейтральных колебаний одно и то же;  $\Phi(y)$  — локальный избыток генерации энергии над диссипацией. Функции  $\tau(y)$  и  $\Phi(y)$  изображены на рис. 19 для критических параметров течения Пуазейля:  $R=3848$ ;  $\alpha=1,02$ ;  $X=0,396$ ;  $y_c=0,86$ . Приведенные данные иллюстрируют роль вязкости в процессе генерации энергии. Только вязкость порождает напряжения Рейнольдса  $\tau$ , поскольку уравнение Релея (2.11), имеющее чисто вещественные решения, не может дать ненулевые значения  $\tau$  [137]. С другой стороны, согласно (4) положительные значения  $\Phi$  могут получиться только при  $\tau > 0$ .

Характер функции  $\Phi(y)$  также указывает на двойственную роль вязкости. Вблизи стенки решающую роль играет вязкая диссипация  $\Phi < 0$ , но ее влияние с удалением от границы быстро

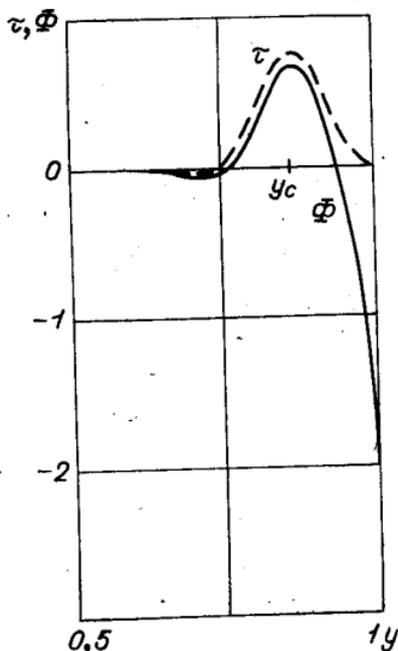


Рис. 19.

убывает. Резкое поведение  $\Phi(y)$  объясняется существованием на стенке вязкого пограничного слоя, где осуществляется сток пульсационной энергии. Другая зона, где проявляется влияние вязкости, расположена в окрестности критического слоя. Здесь вязкость обеспечивает надлежащий сдвиг фаз («зацепление») между поперечной и продольной компонентами пульсационной скорости, который приводит к появлению ненулевых напряжений Рейнольдса. На рис. 19 видно, что  $\tau$  и  $\Phi$  достигают своих максимальных значений как раз в окрестности  $y = y_c$ .

Неустойчивость течения Пуазейля связана с первой модой, но исследование следующих спектральных мод позволяет обнаружить некоторые важные свойства малых возмущений. Выборочные расчеты спектра при фиксированных  $\alpha$  были проведены в работах [228, 358]. На рис. 20 показаны декременты и фазовые скорости для первых восьми спектральных мод при  $R = 10^4$ . В области малых волновых чисел, как и при течении Куэтта,  $Y_n$  следуют зависимостям (1.17), причем нечетные номера 1, 3, 5, 7 отвечают симметричным собственным функциям  $v(y)$ , а четные 2, 4, 6, 8 — антисимметричным. С увеличением  $\alpha$  все  $Y_n$  выходят на асимптотическую зависимость  $Y_n = -\alpha/R$ . При больших  $\alpha$ , как и в течении Куэтта, все функции  $Y_n(\alpha)$  имеют максимумы, анализ поведения которых показывает, что они не приводят к неустойчивости.

Большой интерес представляет поведение фазовых скоростей  $X_n$ . При  $\alpha \ll 1$  они соответствуют формулам (1.1.8) и составляют значения порядка единицы. С ростом  $\alpha$  спектральные моды четко разделяются на два класса. Это пристенные моды (1, 2, 5, 8), у которых при  $\alpha \rightarrow \infty$  фазовая скорость стремится к нулю, а критическая точка  $y_c$  движется к стенке, и приосевые моды (3, 4, 6, 7), у которых фазовая скорость стремится к максимальной скорости течения ( $U_m = 3/2$ ), а  $y_c$  — к оси канала.

В предыдущей главе уже был рассмотрен вопрос о локальных свойствах возмущений при больших значениях  $\alpha$ . В обширной литературе по устойчивости этой проблеме практически не уделено внимания, что объяс-

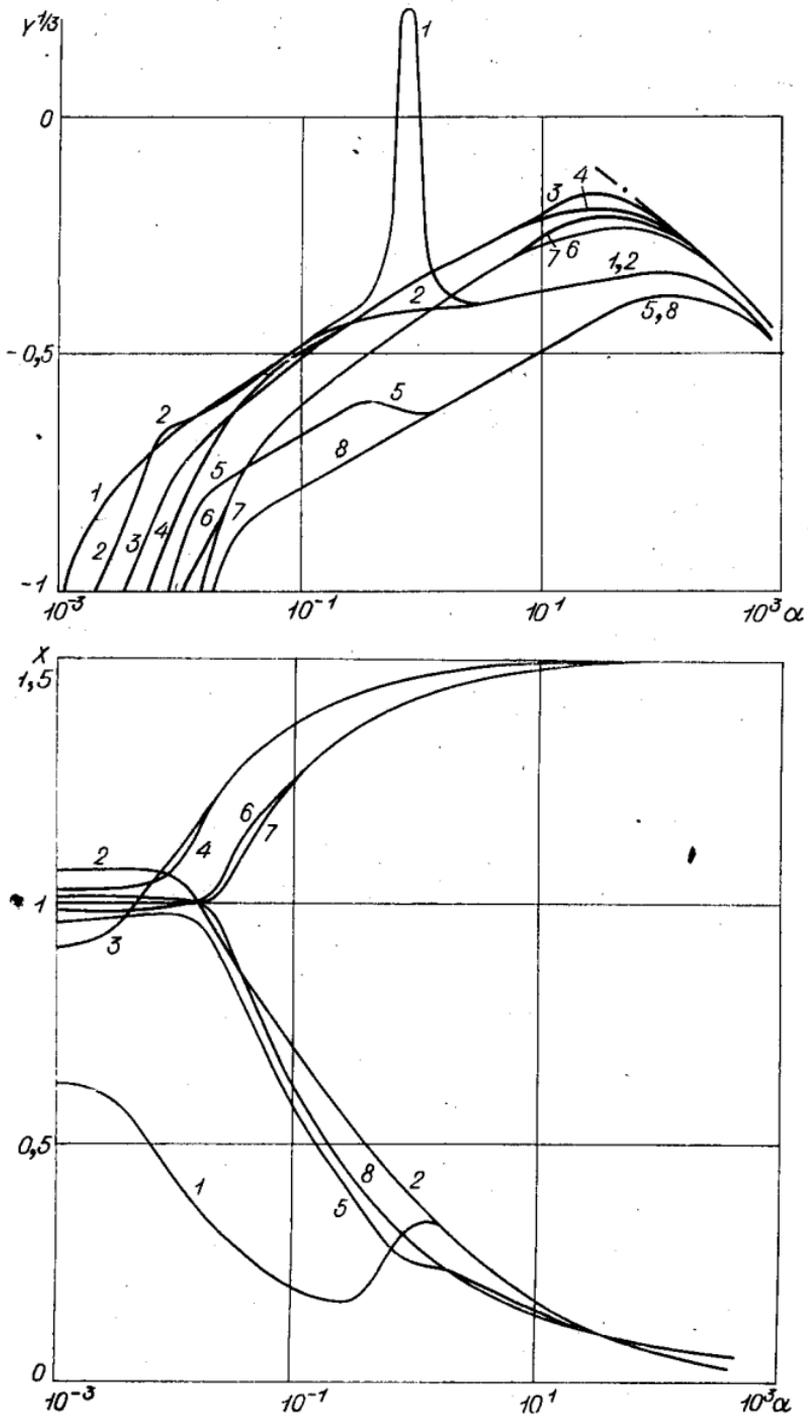


Рис. 20.

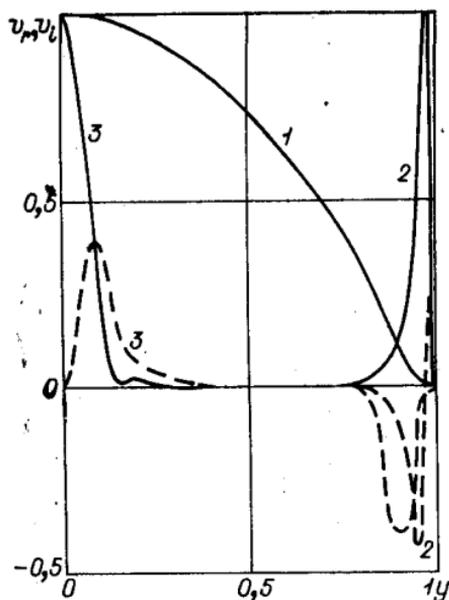


Рис. 21.

няется вычислительными трудностями при больших  $\alpha$  и  $R$ . Но для целей данной работы исследование свойств мелкомасштабных возмущений имеет большое значение. На рис. 21 показаны собственные функции, соответствующие течению Пуазейля для трех разных наборов параметров. Нормировка проведена так, чтобы в точке максимума модуля собственной части (сплошные линии) была равна единице, а мнимая (пунктир) — нулю. Кривые 1

отвечают параметрам носика нейтральной кривой. Вещественная часть собственной функции  $v_r$ , за исключением пристенной зоны, примерно повторяет профиль скорости основного течения, мнимая часть  $v_i$  отлична от нуля лишь в окрестности критической точки. Поскольку  $\alpha=1,02$ , свойства локальности еще не проявляются и собственная функция  $v(y)$  одного порядка величины во всей области течения.

Кривые 2 отвечают параметрам  $R=10^4$ ;  $\alpha=30$ ;  $C=0,11-0,043i$ ;  $y_c=0,96$ ; это первая пристенная мода. Кривые 3 соответствуют следующим данным:  $R=10^4$ ;  $\alpha=10, 35$ ;  $C=1, 486-0,0108 i$ ;  $y_c=0,097$ ; это приосевая мода со спектральным номером 3. При этих параметрах свойства локальности выражены в полной мере, ибо, как видно, собственные функции практически финитны.

Скачкообразный характер проявления свойств локальности (см. рис. 5) указывает на то, что при  $\alpha=\alpha_{\text{лок}}$  происходит качественная перестройка спектра, связанная с возникновением точек кратности собственных значений. На примере течения Куэтта было установлено, что после точек кратности собственные функции теряли

свойства симметрии. В случае течения Пуазейля происходит то же самое. Действительно, рассматривая, к примеру, в области  $0 \leq y \leq 1$  локальную пристенную моду, мы можем в силу сохранения величины собственного значения при сокращении интервала интегрирования с одинаковым успехом считать собственную функцию продолженной в область  $-1 < y < 0$  симметричным или антисимметричным способом, благо уравнение Орра — Зоммерфельда допускает обе эти возможности. С равным успехом в условиях локальности собственная функция может быть продолжена в область  $(-1, 0)$  несимметричным образом, например практически нулем. В этом случае можно построить для данного собственного значения еще две собственные функции, т. е. установить кратность спектра. Действительно, в силу симметрии профиля скорости и граничных условий наряду с собственной функцией  $v(y)$  при том же  $C$  должна существовать и собственная функция  $v(-y)$ , что непосредственно следует из уравнения Орра — Зоммерфельда. Тогда собственными функциями будут и  $v_1 = v(y) + v(-y)$  и  $v_2 = v(y) - v(-y)$ . Заметим, что в случае кратности спектра, когда одному и тому же  $C$  отвечают симметричная и антисимметричная собственные функции, произвольная, а следовательно асимметричная, их комбинация тоже является собственной функцией. Поэтому для кратности спектра необходимо и достаточно существование асимметричной собственной функции.

Строгим доказательством кратности спектра при  $\alpha > \alpha_{\text{лок}}$  мы не располагаем. Однако результаты расчетов не оставляют на этот счет никаких сомнений. Рассмотрим, например, моды 1 и 2 для течения Пуазейля (см. рис. 20). Собственные значения рассчитывались путем интегрирования на интервале  $(0, 1)$ , причем заранее были учтены свойства четности и нечетности собственных функций, так что для первой моды на оси ставились условия симметрии, а для второй — антисимметрии. Такой раздельный метод расчета исключал случайный «перескок» с одной моды на другую при движении по непрерывности путем увеличения параметра  $\alpha$ . Тем не менее при  $\alpha > \alpha_{\text{лок}}$  первая симметричная

мода и вторая антисимметричная имеют одинаковые собственные значения  $C = X + iY$ .

Характерно поведение приосевых мод. Когда  $\alpha > \alpha_{\text{лок}}$ , но точка  $y_c$  еще сравнительно удалена от оси, симметричная мода 3 и антисимметричная 4 имеют совпадающие собственные значения, а с приближением  $y_c$  к оси (вследствие роста  $\alpha$ ) они вновь расслаиваются, поскольку различие граничных условий при  $y=0$  становится значительным. Проблема неустойчивости того или иного течения связана с вопросом, может ли в потоке генерация настолько преобладать над диссипацией, чтобы было выполнено неравенство

$$dE/dt = \int_0^1 \Phi(y) dy > 0.$$

Трудно ответить на этот вопрос в терминах свойств профиля скорости рассматриваемого течения. Сопоставляя результаты для течений Куэтта и Пуазейля, можно думать, что существенную роль играет кривизна профиля. Но, с другой стороны, локальное уменьшение кривизны и образование точки перегиба могут вызвать невязкую неустойчивость. Поэтому важно рассмотреть широкий класс течений с целью изучения влияния формы профиля на его устойчивость.

#### § 4. ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТОЙЧИВОСТИ

Прежде всего рассмотрим параболический профиль, подвергнутый локальной деформации,

$$U = 3/2(1 - y^2) + \varepsilon \exp[-2000(y - y_0)^2].$$

Для четкого выделения пристенных и приосевых мод результаты удобно представить в плоскости  $(y_c, Y)$ . На рис. 22 изображены первые четыре спектральные моды в указанных координатах для значений  $R = 10^4$ ;  $y_0 = 0$ ;  $\varepsilon = 0$  и  $0,02$  (данные для  $\varepsilon = 0$  нанесены пунктиром). Для пристенных мод (кривые 1 и 2) собственные значения для  $\varepsilon = 0$  и  $0,02$  совпадают с точностью до

графического изображения. Длинноволновые возмущения тоже не реагируют на столь малую деформацию профиля, так как зависят от него интегрально. Коротковолновые приосевые возмущения, напротив, отличаются в этих двух случаях коренным образом. Для течения Пуазейля третья мода возмущений затухает при всех  $\alpha$  и  $R$ . Деформация приводит к неустойчивости по третьей моде в определенном диапазоне волнового числа  $\alpha$ , которое служит параметром при движении вдоль кривых 1—4.

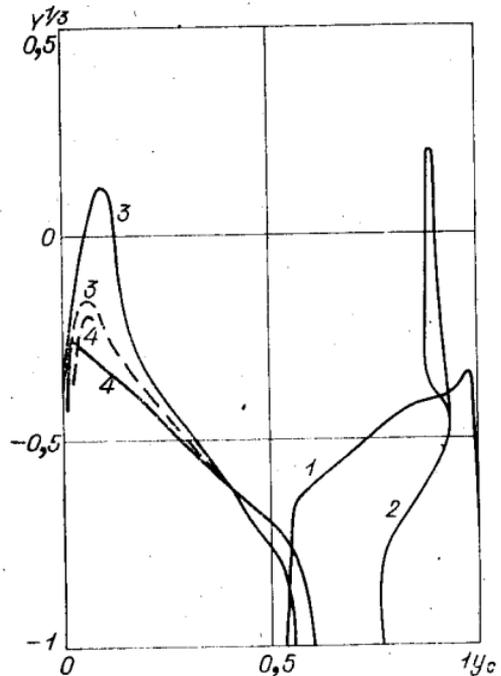


Рис. 22.

Хотя собственные значения четвертой моды лежат при  $R=10^4$  в области устойчивости, при  $R > 1,7 \cdot 10^5$  эти возмущения тоже нарастают. Критические точки наиболее растущих возмущений третьей и четвертой мод при  $R \rightarrow \infty$  стремятся к точкам перегиба деформированного профиля скорости  $y=0,055$  и  $y=0,016$  соответственно. Эти факты позволяют констатировать, что рассматриваемая деформация профиля скорости порождает невязкую неустойчивость к локальным возмущениям.

Был проведен расчет и для случая  $\varepsilon=0,02$  и  $y_0=0,9$ . В этих условиях собственные значения приосевых мод не отличались от случая  $\varepsilon=0$  с точностью до трех значащих цифр по  $X$  и  $Y$ . Характерно, что возмущения, ответственные за неустойчивость течения Пуазейля, не реагировали на эту деформацию, поскольку они отвечают волновым числам  $\alpha \sim 1$  и не являются локальными. Зато весьма активно отреагировали пристенные возмущения с  $\alpha \approx 10$ , породив новую неустойчивость.

Проведенный анализ показывает, что с увеличением  $\alpha$  или  $R$  критические слои стремятся либо к стенкам, либо к точке экстремума профиля скорости, либо, наконец, к точкам перегиба, вызывающим невязкую неустойчивость. Как будет показано ниже, предельными могут быть и точки излома профиля скорости.

Возможность потери устойчивости основного потока одновременно на нескольких спектральных модах в значительной степени усложняет анализ и подчеркивает необходимость достаточно подробного изучения спектра.

Мы выяснили, как сказывается на устойчивости профиля его локальная деформация. Рассмотрим теперь более трудный вопрос о зависимости устойчивости выпуклых профилей от их формы.

Прежде всего интересно изучить объединение течений Куэтта и Пуазейля:

$$U = (1-A)(1-y^2) + Ay, \quad (1)$$

которое соответствует напорному течению между пластинами при их встречном движении со скоростью  $\pm A$ . При  $A=0$  формула (1) дает течение Пуазейля, при  $A=1$  — течение Куэтта.

Устойчивость такого течения изучалась Поттером [486] и Хейнсом [363], которые обнаружили, что при  $A=0,26$  критическое число Рейнольдса  $R_c$  обращается в бесконечность, но  $\alpha_c \rightarrow 0$ , так что  $\alpha_c R_c$  остается конечным.

Исследуем преобразование спектра собственных значений при переходе от течения Пуазейля к течению Куэтта [189] путем увеличения параметра  $A$  при  $R=10^5$ . При достаточно малых  $A$  отличие профиля от параболы невелико, и при данном числе Рейнольдса сохраняется неустойчивость течения. Однако симметрия течения нарушается, и в спектре малых возмущений (рис. 23,  $A=0,15$ ) происходит перестройка. Пристенные моды 1 и 2 (симметричная и антисимметричная при  $A=0$ ) теряют свойства симметрии. У моды 1 с ростом  $\alpha$  критическая точка  $y_c$  стремится к нижней стенке  $y=-1$ , а у моды 2 к верхней  $y=1$ . Соответственно и фазовые скорости стремятся к  $\pm A$  (см. рис. 23). При

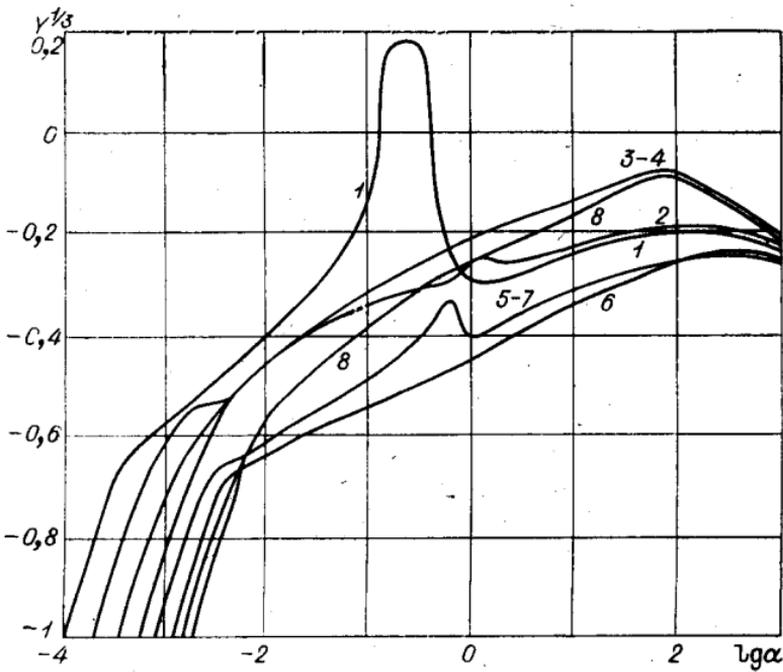
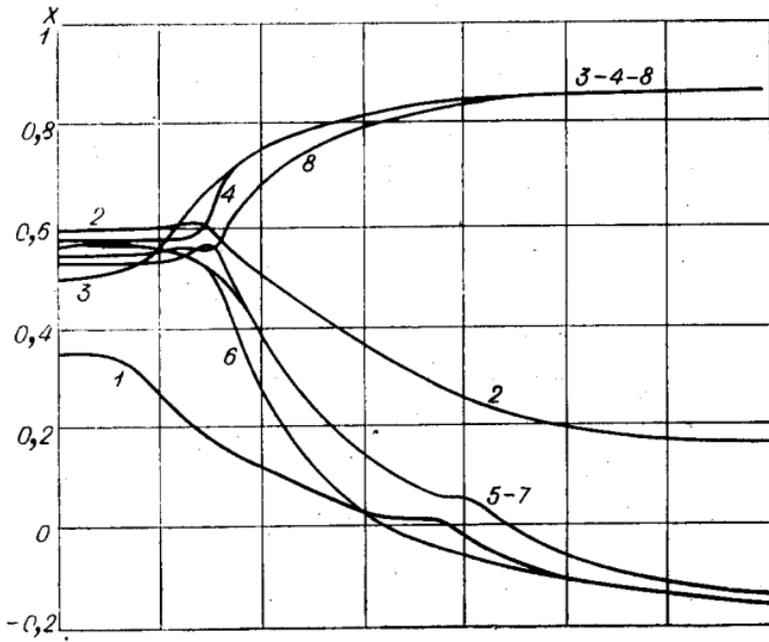


Рис. 23.

больших спектральных номерах происходит обмен мод, из которых 6 и 7 становятся нижними пристенными, а 8 — приосевой. Такое изменение возможно только при прохождении через точку кратности спектра, когда происходит обмен ветвей.

Кратность 1 и 2 при  $A=0$  и  $\alpha > \alpha_{\text{пок}}$  теперь утрачена — они «принадлежат» разным стенкам, что ведет к различию как фазовых скоростей, так и декрементов. В то же время у 5 и 7, которые являются нижними пристенными, собственные значения при больших  $\alpha$  совпадают. Приосевые моды — 3 и 4 — изменились слабо.

С увеличением  $A$  в спектре продолжается сложная перестройка, связанная с обменом мод, изменением свойств кратности. Максимум в профиле скорости смещается к верхней стенке и совпадает с ней при  $A=2/3$ . Приосевые моды следуют за максимумом и при  $A > 2/3$  становятся верхними пристенными. Постепенно распределение верхних и нижних мод становится симметричным, а при  $A \rightarrow 1$  спектр переходит в типичный для течения Куэтта.

Изложенное позволяет заключить, что точки кратности спектра играют ключевую роль, определяющую свойства собственных функций. В течении Куэтта с ними связана потеря симметрии при сохранении симметричных условий, в течении Пуазейля они определяют свойства локальности при больших  $\alpha$ , через них происходит смена приосевых и пристенных мод при деформации профиля скорости. Еще один вывод из проведенного анализа состоит в том, что неустойчивые возмущения принадлежат моде, имеющей критический слой вблизи той стенки, где градиент скорости основного потока максимален.

В связи с изучением связи геометрической формы исходного профиля со свойствами устойчивости остановимся на одном семействе профилей (в отсутствие объемных сил, не удовлетворяющих стационарным уравнениям движения), которые получаются деформацией параболы Пуазейля путем ее «заострения» до предельного треугольного профиля:

$$U = 6[(A-1)y^2 - A\sqrt{y^2 + 10^{-9}} + 1]/(4-A). \quad (2)$$

При  $A=0$  имеем параболу Пуазейля, при  $A=1$  — треугольный профиль скорости с  $U_{\max}=2$ . Маленькое число под радикалом добавлено, чтобы избежать разрыва производной. Нормировочный множитель выбран так, чтобы средняя скорость оставалась равной единице.

Профили такого вида рассматривались Поттером [487], который установил, что с ростом  $A$  критическое число Рейнольдса возрастает, обращаясь в бесконечность при  $A$ , примерно равном 0,5. Однако такое утверждение является недоразумением, связанным с тем, что рассматривалась только одна спектральная мода. Как показывают расчеты [203], заострение профиля вблизи оси приводит к возникновению неустойчивости по некоторой приосевой моде, тогда как пристенная мода  $l$  ведет себя в соответствии с результатами Поттера. Этот пример весьма поучителен, так как, во-первых, подчеркивает важность детального исследования спектра с целью выявления всех возможных источников неустойчивости и, во-вторых, показывает, что причиной неустойчивости могут быть точки излома на профиле скорости, причем эти точки являются предельными для критических слоев коротковолновых возмущений определенных спектральных мод. Еще один пример подобного рода будет приведен в главе V. Там же будут рассмотрены профили скорости, получаемые из параболы ее «уплощением» вплоть до однородного потока.

Наряду с формой профиля существенное влияние на устойчивость потока может оказывать геометрия области течения.

## § 5. УСТОЙЧИВОСТЬ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Рассмотрим течение между концентрическими круговыми цилиндрами, вызванное их относительным движением и осевым градиентом давления. Это течение служит обобщением практически всех одномерных движений вязкой жидкости, для которых известны аналитические решения. Рассматривая те или иные предельные значения параметров, характеризующих геометрию и кинематику потока, можно получить плоское течение

Куэтта — Пуазейля, течение Гагена — Пуазейля в круглой трубе, напорное течение в кольцевом зазоре, течение Куэтта между вращающимися цилиндрами и многообразные их сочетания. Некоторые из них будут рассмотрены ниже.

Из всех осесимметричных течений наиболее изучено круговое течение Куэтта. Устойчивости этого течения посвящено очень большое число работ, начиная с классического исследования Тейлора [551]. Сошлемся только на монографию Чандрасекара [285], статьи Снайдера [526—528] с большой библиографией и на несколько работ последних лет [133, 165, 166, 168, 186, 233, 458, 459]. Более подробный обзор выходит за рамки настоящей книги.

Суть явления состоит в том, что с ростом скорости вращения внутреннего цилиндра на фоне однородного первичного потока с круговыми линиями тока возникают вторичные ячеистые осесимметричные движения, называемые тейлоровскими вихрями. Начало их возникновения характеризуется критическим значением критерия Тейлора  $T$ . Дальнейший рост числа  $T$  ведет к постепенной интенсификации вторичных течений. Эта неустойчивость сохраняется и в невязком случае, причем при  $T = \infty$  неустойчивы возмущения всех масштабов.

В другом предельном случае, когда оба цилиндра неподвижны, получается течение Пуазейля в кольцевом канале. До последнего времени это течение было трудным для исследования, поэтому в литературе отражены только отдельные результаты [276, 334, 456]. Значительно больше внимания уделено частному случаю — движению в круглой трубе [307]. Большинство авторов склонялось к мнению, что это течение устойчиво к малым возмущениям. Встречались, правда, и исключения [352]. Но в пользу устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе говорят экспериментальные данные о затягивании ламинарного режима за счет специальных мер предосторожности до очень больших значений чисел Рейнольдса [435]. Исчерпывающий ответ об устойчивости течения в кольцевом канале и круглой трубе дан в работах [32, 33, 35, 65, 138].

Одна из основных трудностей анализа течений в цилиндрической геометрии — отсутствие преобразования Сквайра и связанная с этим необходимость исследования трехмерных возмущений, что приводит к повышению порядка системы уравнений и существенному возрастанию объема вычислений.

В качестве характерного масштаба длины выберем ширину зазора между цилиндрами. Безразмерное значение радиуса внутреннего цилиндра  $\xi$  будет определять геометрию течения: большие  $\xi$  соответствуют узкому, а малые — широкому зазору между цилиндрами. За характерный масштаб скорости выберем среднерасходную скорость в осевом направлении, безразмерная скорость вращения  $v_0$  внутреннего цилиндра будет служить кинематической характеристикой течения. Внешний цилиндр предполагается покоящимся. Динамическим параметром служит число Рейнольдса, построенное по выбранным масштабам скорости и длины. В качестве кинематического параметра естественно использовать также число Тейлора

$$T = 2\omega_0^2 r_0^2 / (r_0 + r_1) \cdot d^3 / \nu,$$

которое обычно употребляется при анализе конвективной неустойчивости. Здесь  $r_0$  и  $r_1$  — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров;  $d = r_1 - r_0$ ;  $\omega_0$  — угловая скорость вращения внутреннего цилиндра;  $\nu$  — кинематическая вязкость. Число Тейлора  $T$  связано с выбранным кинематическим параметром  $v_0$  посредством соотношения

$$\sqrt{T} = 4\beta R; \quad \beta = 1/4\sqrt{2/(1+2\xi)} v_0. \quad (1)$$

Уравнения Навье — Стокса в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} L_1 v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{R} \left( L_2 v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right); \\ L_1 v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \left( L_2 v_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right); \\ L_1 v_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \left( L_2 v_z + \frac{v_z}{r^2} \right); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0;$$

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial}{\partial z};$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Здесь  $v_r$ ,  $v_\varphi$ ,  $v_z$  — компоненты вектора скорости в цилиндрических координатах  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ ;  $R$  — число Рейнольдса, определенное по ширине зазора (а не по полуширине, как раньше).

Предполагая, что стационарное решение одномерно и зависит только от координаты  $r$ , для непроницаемых цилиндров получим общее решение в виде

$$v_r \equiv 0; \quad v_z = U(r) = Ar^2 - B \ln r + C; \quad v_\varphi = V_\varphi(r) = E/r - Dr. \quad (2)$$

Выражения для постоянных находятся путем удовлетворения граничных условий ( $U = V_\varphi = 0$  при  $r = 1 + \xi$ ;  $U = 0$ ,  $V_\varphi = v_0$  при  $r = \xi$ ) и учета условия нормировки

$$2 \int_{\xi}^{1+\xi} U r dr = 1 + 2\xi:$$

$$A = 2(\ln(1 + \xi) - \ln \xi) / [1 + 2\xi - (1 - 2\xi + 2\xi^2) \ln(1 + 1/\xi)];$$

$$B = (1 + 2\xi) / \ln(1 + 1/\xi); \quad C = B \ln \xi - A\xi^2;$$

$$D = v_0 \xi / (1 + 2\xi); \quad E = D(1 + \xi)^2.$$

Линеаризуя уравнения Навье — Стокса и разыскивая решение для возмущения в виде гармонического колебания

$$\{\omega_1(r), \omega_2(r), \omega_3(r), \\ -iq(r)/\alpha R\} \exp [i\alpha(z - Ct) + im\varphi],$$

получим уравнения для амплитуд

$$\begin{cases} a\omega_1 + 2/r \cdot R V_\varphi \omega_2 = i/\alpha \cdot q' + [(r\omega_1)'/r]' - 2im/r^2 \cdot \omega_2; \\ a\omega_2 - R(V'_\varphi + V_\varphi/r)\omega_1 = -m/\alpha r \cdot q + [(r\omega_2)'/r]' + \\ \quad + 2im/r^2 \cdot \omega_1; \\ a\omega_3 + R U' \omega_1 = -q + 1/r \cdot (r\omega_3)'; \\ (r\omega_1)' + i\alpha r \omega_3 + im\omega_2 = 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$a = i\alpha R(U - C) + im R V_\varphi / r + m^2 / r^2 + \alpha^2.$$

Здесь  $\alpha \in (0, \infty)$  и  $m = 0, 1, 2, \dots$  — осевое и азимутальное волновые числа;  $C = X + iY$ .

Граничные условия прилипания имеют вид

$$\omega_j(\xi) = \omega_j(1 + \xi) = 0; \quad j = 1, 2, 3.$$

Граничные условия на функцию  $q(r)$ , пропорциональную давлению, не ставятся, поэтому естественно исключить  $q$  из системы. Однако такое исключение, приводящее к усложнению уравнений и появлению членов со вторыми производными  $U''$  и  $V''_\varphi$ , не обязательно. Правда, непосредственное использование системы (3) затруднительно, поскольку формально она имеет седьмой порядок, тогда как число граничных условий составляет шесть. Но порядок системы понижается, после того как из уравнения неразрывности величину  $(r\omega_1)'$  подставить в первое уравнение системы, которое при этом приводится к виду  $a\omega_1 - 2/r R V_\varphi \omega_2 = iq'/\alpha - i\alpha\omega_3 - im(r\omega_2)'/r^2$ .

Введем новые функции

$$\Psi = ir\omega_1/\alpha; \quad \Phi = r\omega_2; \quad f = r\omega_3; \quad F = \Phi'/r. \quad (4)$$

Тогда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \omega_3' = f/r; & f' = ar\omega_3 - i\tau\Psi + qr; & \Psi' = r\omega_3 + \gamma\Phi; \\ F' = a\Phi/r - n\Psi + \gamma q; & \Phi' = rF; & q' = \alpha^2(f/r - \Psi/r + F + i\beta\Phi), \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \tau &= \alpha R U'; & n &= 2\alpha m / r^3 + i\alpha R (r V'_\varphi + V_\varphi) / r^2; \\ \gamma &= m / \alpha r; & \beta &= 2R V_\varphi / \alpha r^2. \end{aligned}$$

В некоторых выражениях фигурирует множитель  $\alpha^{-1}$ . Он введен, для того чтобы в окончательной системе (5) был возможен предельный переход при  $\alpha \rightarrow 0$ . Для удоб-

ства изложения и проведения расчетов вводится независимая переменная

$$y=r-\xi; y \in (0, 1).$$

Граничные условия для системы (5) имеют вид

$$\omega_3 = \Psi = \Phi = 0 \text{ при } y=0; y=1. \quad (6)$$

В соответствии с этими условиями векторы  $V$  и  $W$  из соотношения (1.3.5) следовало бы выбрать так:  $V = \{\omega_3, \Psi, \Phi\}$  и  $\omega = \{f, F, q\}$ . Тогда  $u \equiv 0$  и начальное условие для матрицы  $A$  однородно:  $A(0) = 0$ . Однако такой выбор неоптимален в смысле простоты прогоночной системы. Если положить  $V = \{f, F, q\}$  и  $W = \{\omega_3, \Psi, \Phi\}$ , то эта система приобретает простейший вид  $A' = D_1 + D_2 A - A(D_3 + D_4 A)$ ;

$$D_1 = \begin{pmatrix} ar - i\tau & 0 & \\ 0 & -n & \frac{a}{r} \\ 0 & \frac{\alpha^2 a}{r} & i\alpha^2 \beta \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & \gamma \\ \frac{\alpha^2}{r} & \alpha^2 \gamma & 0 \end{pmatrix};$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; D_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако постановка начальных данных для матрицы  $A$  вызывает затруднения, связанные с тем, что в точках  $y=0$  и  $y=1$  матрица  $A$  имеет определенные особенности. Чтобы преодолеть эту трудность, необходимо на один или несколько шагов отойти от концов интервала. Для этого можно воспользоваться первоначальным выбором векторов  $V$  и  $W$ , а затем перейти к новым переменным, как это изложено в § 3 главы I. Решая задачу методом стыковки, в качестве характеристического уравнения получаем

$$F(C) \equiv \det(A^- - A^+) = 0 \text{ при } y = y_c.$$

Данная задача сложнее обычного уравнения Орра — Зоммерфельда.

Первоначально рассмотрим результаты расчетов для случая напорного течения в кольцевом канале при

$V_\varphi=0$ , когда профили скорости  $U(y)$  образуют семейство, зависящее от одного параметра  $\xi$ . С вариацией  $\xi$  изменяется ширина зазора между цилиндрами и деформируется профиль скорости. При  $\xi \rightarrow 0$  профиль скашивается к внутреннему цилиндру и стремится к профилю скорости в круглой трубе. При  $\xi \rightarrow \infty$  зазор между цилиндрами относительно сужается и в пределе получается плоское течение Пуазейля.

На рис. 24 показаны зависимости  $Y(\alpha)$  в диапазоне изменения  $\alpha \in (0,004; 400)$  при фиксированных значениях  $R=20\,000$  и  $\xi=1$  для высшей радиальной

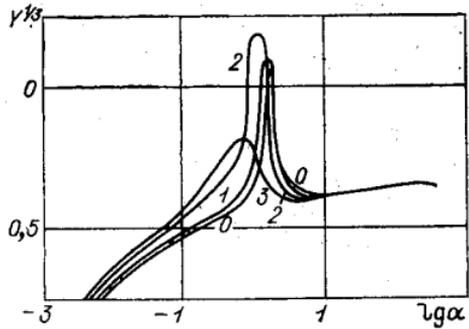


Рис. 24.

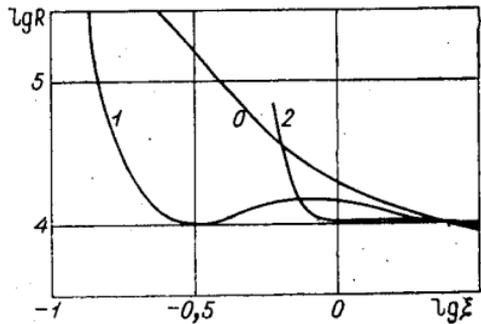


Рис. 25.

моды и различных азимутальных спектральных мод  $m=0, 1, 2, 3$ . Для выбранного числа Рейнольдса неустойчивость возбуждается при  $m=0, 1, 2$ , но в одном и том же районе значений  $\alpha$  (около 2). С ростом  $\alpha$  все кривые сливаются, то же относится и к фазовым скоростям  $X(\alpha)$ . Это асимптотическое свойство сразу следует из системы (5). Зависимости  $Y(\alpha)$  в окрестности  $\alpha=2$  имеют резкий характер поведения, особенно при  $m=0$ . Второй максимум  $Y(\alpha)$  достигается при  $\alpha \sim 100$ , но, как обычно, к потере устойчивости не ведет. С дальнейшим ростом  $\alpha$  кривые  $Y(\alpha)$  асимптотически выходят на обычную зависимость  $Y=-\alpha/R$ .

Приведенные результаты свидетельствуют, что в данном случае теорема Сквайра не имеет силы; наиболее опасны возмущения с  $m=2$ , что видно также из рис. 25,

на котором показаны зависимости критического числа Рейнольдса  $R_*$  от  $\xi$ . С изменением  $\xi$  роль наиболее опасных переходит от одних возмущений к другим, поэтому при исследовании гидродинамической устойчивости недостаточно ограничиваться только осесимметричными возмущениями.

Для приблизительно плоского течения с  $\xi=50$   $R_*(m=0)=7696$ ;  $R_*(m=1)=8000$ ;  $R_*(m=2)=8300$ . С уменьшением  $\xi$  эти значения увеличиваются, оставаясь близкими. В диапазоне  $0,7 < \xi < 3$   $\min R_*$  достигается при  $m=2$ ; для  $0,13 < \xi < 0,7$  — при  $m=1$ . С дальнейшим уменьшением  $\xi$  значения  $R_*$ , соответствующие  $m=1$  и  $2$ , быстро увеличиваются, уходя в бесконечность при конечных значениях  $\xi$ . Иначе ведет себя осесимметричное возмущение. Начиная с некоторого  $\xi \approx 0,5$ ,  $R_*(\xi)$  асимптотически выходит на зависимость, которую с довольно хорошей точностью можно описать формулой  $R_* = 1,26 \cdot 10^4 \xi^{-2,2}$ . Это значит, что напорное течение жидкости между коаксиальными цилиндрами становится полностью устойчивым ( $R_* = \infty$ ) по отношению к малым возмущениям только в пределе при уменьшении радиуса внутреннего цилиндра до нуля. Этот предельный случай не соответствует течению Пуазейля в круглой трубе, так как для последнего на оси ставятся отличные от (6) граничные условия, следующие из (4), если потребовать ограниченности скорости при  $r=0$ :

$$\Psi = \Phi = f = 0 \text{ при } r=0. \quad (7)$$

При численном решении задачи нужно иметь возможность вычислять правые части системы (5) при  $r=0$ . Здесь возникают трудности при устранении особенностей. Если пользоваться разложением решения в степенные ряды в окрестности  $r=0$ , то для каждого  $m$  получаются свои коэффициенты разложения, которые имеют громоздкий вид. К тому же при больших значениях  $\alpha R$  должно быть взято большое число членов разложения. Однако основное неудобство состоит в том, что при решении системы (5) значения  $\omega_3$ ,  $F$ ,  $q$  при  $r=0$  нельзя задавать по произволу. Это связано с тем, что функция  $\omega_3(r)$  вблизи  $r=0$  имеет представление

$\omega_3 \sim r^m$  и при  $m > 0$  нужно задавать не  $\omega_3(0)$ , а соответствующую производную.

Эти трудности легче всего преодолеть, если граничные условия (7) выполнить не при  $r=0$ , а при  $r=r_0 \ll 1$ . Осуществляя предельный переход  $r_0 \rightarrow 0$ , мы автоматически удовлетворим условия ограниченности в отличие от варианта, когда при  $r=r_0$  формулируются условия прилипания (6). Впрочем, для контроля предельный переход осуществлялся для условий обоих типов, и это не сказалось на величине собственных значений. Заметим, что в основном и контрольном расчетах использовались различные профили скорости: в контрольном — обычный профиль (2), а в основном два профиля — обычный с условием  $U'(r_0)=0$  и параболический с  $U=2(1-r^2)$ . Расчеты показали, что для практических целей достаточно зафиксировать значение  $r_0=0,01$ , тогда собственные значения не изменяются в трех знаках при дальнейшем уменьшении  $r_0$ . Расчеты велись в диапазоне  $\alpha(0,001; 400)$ ,  $R \geq 5000$  для 16 спектральных номеров  $m$  и прекращались, когда собственные значения выходили на асимптотические зависимости.

На рис. 26 показаны зависимости  $Y(\alpha)$  для нескольких радиальных мод при двух значениях  $m$ :  $m=0$  (сплошные линии) и  $m=1$  (штриховые). В нумерации кривых первая цифра означает номер радиальной моды  $n$ , вторая — азимутальной моды  $m$ . Число Рейнольдса выбрано  $R=5000$  для возможности сравнения расчетов с результатами работы [307], где для  $\alpha=1$  и  $m=0$  представлен график некоторых спектральных мод. Согласие получилось удовлетворительное.

При больших и малых  $\alpha$  значения  $\alpha Y_{nj}(\alpha)$ , как и для плоских течений, выходят на определенные асимптотические зависимости. Из рис. 26 видно четкое разделение возмущений на пристенные и приосевые. Как и в плоском канале, для приосевых собственных значений  $Y(\alpha)$  имеет единственный коротковолновый максимум. У пристенных возмущений с  $m=0$  также лишь один коротковолновый максимум при  $\alpha \approx 100$ . Длинноволновый максимум, типичный для плоского течения, имеет только функция  $Y_{11}(\alpha)$ . Все  $Y_{nj} < 0$ .

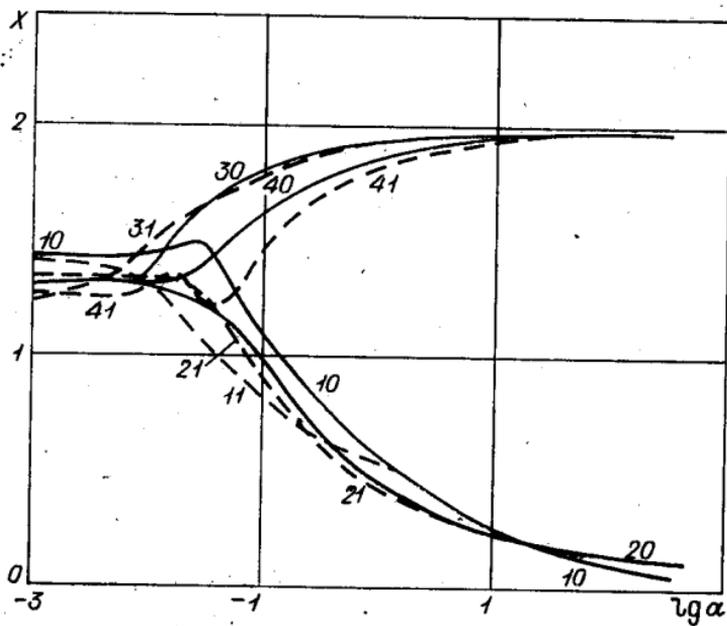
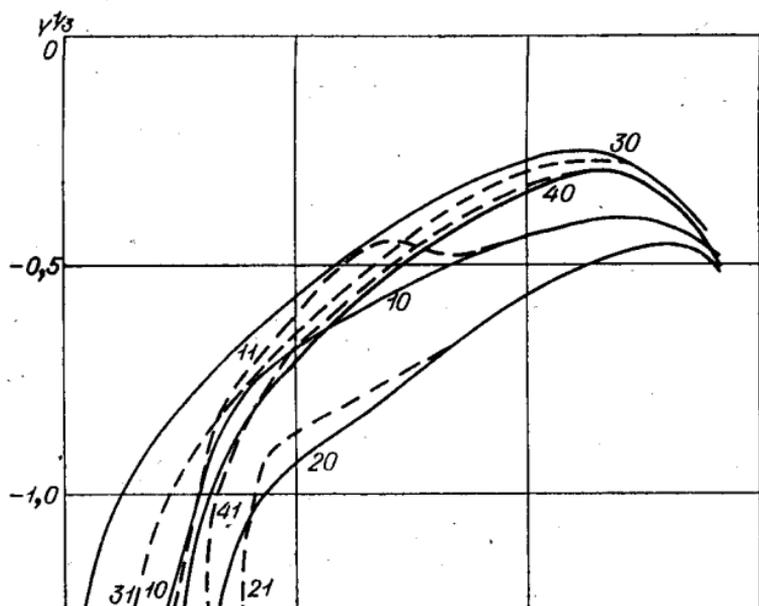


Рис. 26.

При  $\alpha \sim 1$  наиболее опасно возмущение с  $m=1$ . При  $m > 1$ , как и для случая  $m=0$ , длинноволновый максимум отсутствует. Как показали расчеты, этот максимум исчезает и при  $m=1$ , когда число Рейнольдса превышает  $4,5 \cdot 10^5$ . В этом отношении течение в трубе отличается от плоского, для которого при всех числах Рейнольдса существует характерный длинноволновый максимум, который и «выходит» в область неустойчивости при больших числах Рейнольдса.

Для полного изучения устойчивости течения при увеличивающемся числе Рейнольдса достаточно проследить за изменением локальных максимумов функций  $Y_{kj}(\alpha)$ . С ростом  $R$  они выходят на асимптотические зависимости, оставаясь отрицательными, а величина  $\alpha_{\max}$  для всех номеров  $k, j$  увеличивается.

Таким образом, численный анализ гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе в полном диапазоне изменения параметров показывает устойчивость этого течения к малым трехмерным возмущениям при любых числах Рейнольдса.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости спирального течения, которому посвящено несколько работ, где изложены некоторые частные случаи. В работах [285, 314, 350] исследовалась устойчивость к осесимметричным возмущениям в узкощелевом приближении. Осевая компонента скорости считалась малой по сравнению с азимутальной. Было обнаружено, что осевой поток приводит к увеличению критического числа Тейлора в соответствии с формулой

$$T_c = 1708 + \alpha R^2.$$

Более поздние статьи [305, 423] посвящены уточнению коэффициента  $a$  при небольших числах Рейнольдса. Ограничение на число  $R$  снято в работе [383], но предположения об узости зазора и осевой симметрии сохранены. Невязкий анализ устойчивости без ограничения на ширину зазора дан в работе [569]. Здесь расчет проводится для всего диапазона чисел Рейнольдса и Тейлора при произвольных зазорах и по отношению к трехмерным возмущениям. Однако, поскольку все данные о критических числах Тейлора и Рейнольдса получены

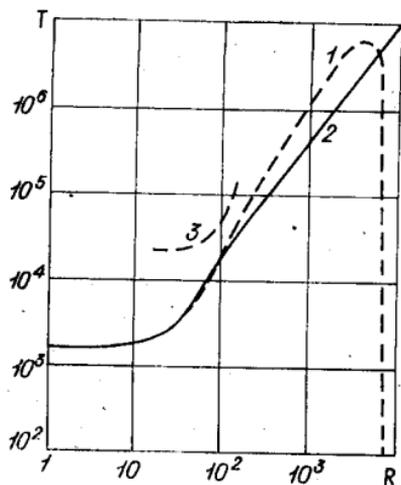


Рис. 27.

в предыдущих работах в узкощелевом приближении, рассмотрим сначала именно этот случай.

Критические значения параметров при  $\xi=50$  и  $m=0$  (в узкощелевом приближении они наиболее опасны) нанесены на рис. 27. Кривая 1 хорошо согласуется с данными предыдущих исследователей. Критическое число Тейлора равно 1708 при  $R=0$ , с ростом  $R$  оно увеличивается, пока число Рейнольдса не достигает значения 4000, после чего  $T$  резко падает до нуля. Критическое волновое число  $\alpha$ .

монотонно убывает от значения 3,12 при  $R=0$  до 2,04 при  $T=0$ . Критическое число Рейнольдса и волновое число при  $T=0$  совпадают с данными для плоского течения Пуазейля. Если вдоль линии 1 проанализировать характер нейтральных кривых, то обнаруживается качественное изменение типа неустойчивости. Нейтральные кривые удобно строить при фиксированном значении параметра  $\beta$ , который определяет кинематику течения. Если  $\beta=\text{const}$ , то при изменении числа Рейнольдса будут пропорционально меняться и числа Тейлора, как это следует из (1). При  $\beta \rightarrow 0$  в пределе получается течение Пуазейля в кольцевом зазоре с типичной для напорных течений петлеобразной нейтральной кривой, вдоль обеих ветвей которой  $\alpha \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ . При  $\beta \rightarrow \infty$  в пределе наблюдается круговое течение Куэтта, которое имеет нейтральную кривую с расходящимися ветвями: вдоль верхней ветви  $\alpha \rightarrow \infty$ , а вдоль нижней  $\alpha \rightarrow 0$ . Возникает вопрос: каким образом происходит подобная перестройка нейтральной кривой при изменении параметра  $\beta$ ?

Оказывается, при любом  $\beta \neq 0$  существуют нейтральные кривые обоих типов. При малых  $\beta$  они разделены, т. е. отвечают разным спектральным модам, но с увели-

чением  $\beta$  происходит их переплетение посредством точек кратности в единое целое. Эта весьма сложная перестройка осуществляется при  $R \approx 40$ . На рис. 27 видно, что из этой точки выходят две кривые в сторону больших  $R$ . Первая из них (1) отвечает носу вязкой (петлеобразной) нейтральной кривой. Вторая кривая, не замеченная предыдущими исследователями, связана с тейлоровской конвективной неустойчивостью. Из рис. 27 следует, что критическое число Рейнольдса (или Тейлора) определяется именно кривой 2 в широком диапазоне чисел Рейнольдса ( $100 \leq R \leq 7000$ ). В этом диапазоне справедливы эмпирические зависимости

$$\sqrt{T_*} \approx 6,4 R_*^{2/3}; \alpha_* \approx 1,2 R_*^{1/3}. \quad (8)$$

С дальнейшим ростом  $R$  волновое число  $\alpha_*$ , достигнув максимума 37,5, начинает убывать, а  $T_*$  увеличивается несколько быстрее. Следует отметить, что если критические числа Тейлора при  $R = \text{const}$  на кривых 1 и 2 отличаются не более чем в 1,5—2 раза при  $R < 7000$ , то критические волновые числа отличаются на порядок.

По опытным данным [411, 526], в диапазоне  $0 < R < 260$  критическое волновое число  $\alpha_*$  возрастает с 3,12 до 7,5. Этот факт, ранее не объясненный, хорошо согласуется с зависимостью (8).

Еще одно существенное различие тейлоровской и вязкой неустойчивости заключается в том, что критические точки нейтральных возмущений конвективно-

Таблица 1

## Критические параметры вязкой неустойчивости

$yc$	$X_*$	$\alpha_*$	$R_*$	$\sqrt{T_*}$
0,259	1,150	3,13	43,3	65
0,201	0,964	2,59	185,4	265
0,120	0,602	2,26	1523,0	1540
0,0874	0,478	2,14	3776,0	2460
0,074	0,410	2,06	6748,0	1830
0,070	0,396	2,04	7740,0	30

Таблица 2

**Критические параметры конвективной неустойчивости**

$U_c$	$X_*$	$\alpha_*$	$R_*$	$\sqrt{T_*}$
0,266	1,16	3,13-	4,3	41,5
0,262	1,16	3,15	17,8	46,0
0,263	1,165	3,25	39,7	62,6
0,306	1,27	5,60	105,0	144,0
0,349	1,36	7,10	192,0	217,0
0,388	1,43	9,60	462,0	360,0
0,430	1,48	15,50	1990,0	1030,0
0,452	1,48	23,10	6413,0	2240,0
0,470	1,49	37,50	28900,0	8220,0

го типа расположены вблизи центра зазора, т. е. отвечают приосевым модам (табл. 1—3). В то же время вязкая неустойчивость обусловлена пристенными модами. Между этими двумя видами неустойчивости существует качественная разница. Расчеты и опытные данные свидетельствуют, что тейлоровская неустойчивость приводит к «мягкому» возбуждению тороидальных вихрей, которые сносятся вдоль потока со своей фазовой скоростью. При отсутствии осевого движения просто возникает вторичный стационарный режим. Вязкая неустойчивость всегда ведет к нестационарному процессу, который так или иначе (плавно или скачком) переходит в турбулентность.

Таблица 3

**Критические параметры вторичной вязкой неустойчивости**

$U_c$	$X_*$	$\alpha_*$	$R_*$	$\sqrt{T_*}$
0,245	1,10	5,19	27,60	151
0,245	1,11	4,90	44,70	158
0,248	1,12	4,11	85,65	212
0,252	1,12	3,45	170,00	314

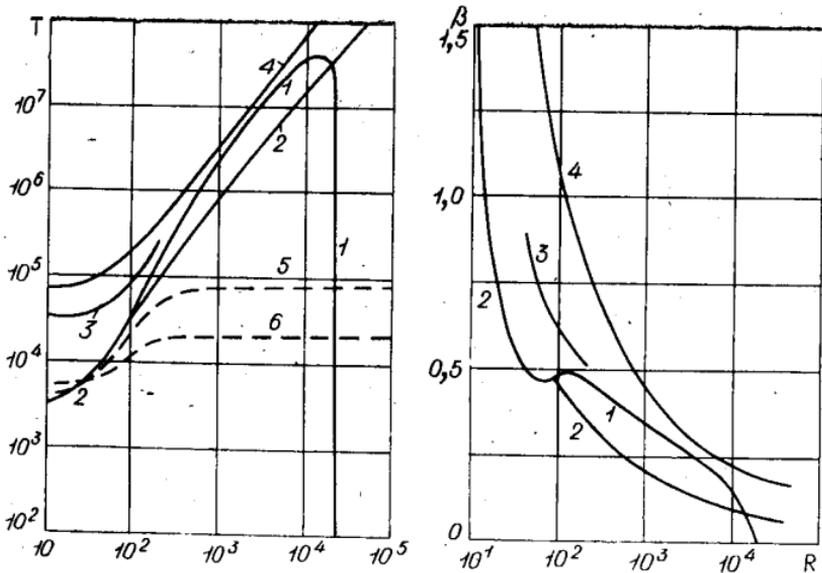


Рис. 28.

Интересно проследить за взаимодействием и сменой этих двух типов неустойчивости, что лучше всего сделать для течения в широком зазоре. На рис. 28 показаны диаграммы устойчивости для течения в кольцевом зазоре, когда радиус внешнего цилиндра вдвое превышает радиус внутреннего ( $\xi=1$ ). Сначала рассмотрим осесимметричные возмущения. Область ниже кривой 2 и левее кривой 1 является областью устойчивости течения к малым возмущениям. При малых скоростях вращения внутреннего цилиндра существуют нейтральные кривые двух типов. К первому относится петлеобразная нейтральная кривая, свойственная вязкой неустойчивости. На рис. 29 это кривая 1. По направлению ее обеих ветвей  $\alpha \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , хотя в данном диапазоне чисел Рейнольдса вдоль верхней ветви это еще заметно не проявляется. Неустойчивость, связанная с указанной кривой, вязкая, потому что при бесконечных значениях  $\alpha$   $R$  диапазон неустойчивости по  $\alpha$  стягивается к нулю, так же как инкременты нарастания. Совсем другой характер имеет нейтральная кривая 2. В этом случае при  $R \rightarrow \infty$  неустойчивыми становятся возмущения с любы-

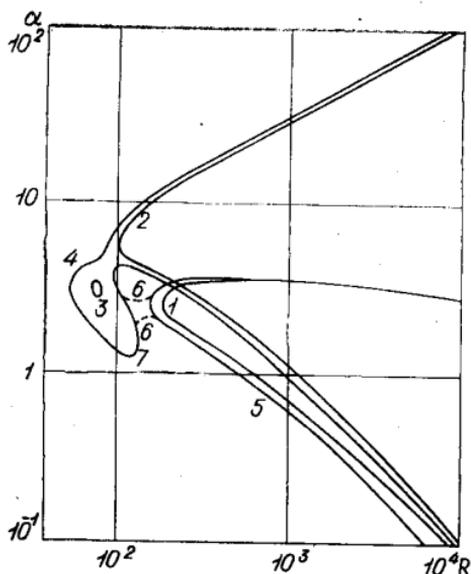


Рис. 29.

ми  $\alpha$  и инкременты нарастания отличны от нуля, что характерно для невязкой (конвективной) неустойчивости.

При  $\beta < 0,09$  критическое число Рейнольдса, определяемое носиком кривой 1, меньше, чем для кривой 2, так что в этих условиях раньше проявляется вязкая неустойчивость. С увеличением  $\beta$  тейлоровская нейтральная кривая «перегоняет» вязкую, кроме того, конвективная неустойчивость проявляется и на более высоких спектральных

модах, иллюстрацией чему служит кривая 4 на рис. 28.

При фиксированных значениях чисел Тейлора и Рейнольдса существует счетный набор зависимостей  $C_n(\alpha)$ , которые иногда пересекаются, образуя точки кратности, посредством чего и осуществляется взаимодействие двух типов неустойчивости. Однако при небольших скоростях вращения внутреннего цилиндра зависимости  $C_n(\alpha)$  не имеют общих точек в области неустойчивости или близкой к ней. Каждая из нейтральных кривых типа 1 или 2 на рис. 29 образована одной спектральной модой. Непрерывно изменяя волновое число как параметр, можно перейти от одной ветви нейтральной кривой к другой через область неустойчивости, оставаясь на одной спектральной моде.

Следовательно, можно говорить о независимости тейлоровской и вязкой неустойчивости, имея в виду, что они проявляются на разных спектральных уровнях и описываются индивидуальными нейтральными кривыми.

Но с увеличением числа Тейлора (или  $\beta$ ) два типа неустойчивости вступают во взаимодействие и теряют свою обособленность, в силу чего нейтральные кривые

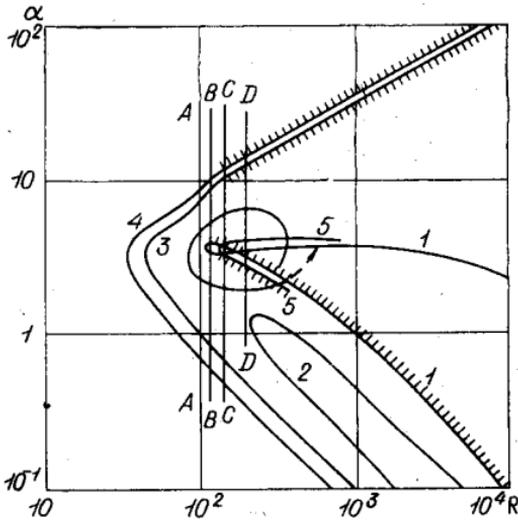


Рис. 30.

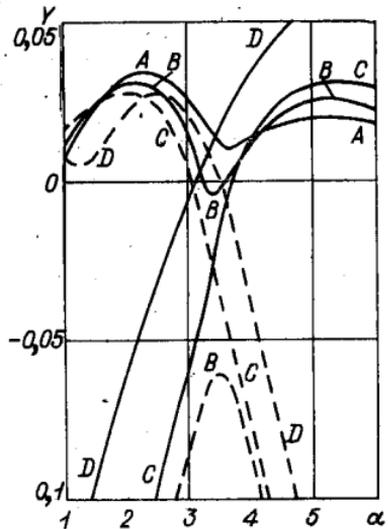


Рис. 31.

обмениваются ветвями и образуют единое целое. Наличие точек кратности в области неустойчивости или вблизи нее приводит к тому, что эта область в плоскости  $(\alpha, R)$  приобретает двулистную структуру. Эволюцию нейтральных кривых демонстрируют рис. 29 и 30. При  $\beta < 0,46$  на рис. 29 имеются две независимые нейтральные кривые типа 1 и 2. При  $\beta = 0,46$  перед ними возникает «островок» неустойчивости 3, который, увеличиваясь в размерах, смыкается с кривой 2, образуя кривую 4. Кривые 4 и 5 с увеличением  $\beta$  смыкаются, как это показано пунктиром 6. Далее, с ростом  $\beta$  выступ 7 устремляется в область больших  $R$  параллельно нижней ветви 5, и при  $\beta = 0,5$  образуется структура линий 1—3 на рис. 30. Внутренняя область устойчивости 2 на этом рисунке с увеличением  $\beta$  сдвигается в область бесконечно больших чисел Рейнольдса, и структура нейтральных кривых принимает вид 4, 5. Следует подчеркнуть, что это не две разные нейтральные кривые, а единая структура. Непрерывно изменяя  $\alpha$  при  $R = \text{const}$ , можно перейти с верхней (заштрихованной) ветви 4 через область неустойчивости к нижней (тоже заштрихованной) ветви 5. Аналогично связаны и противопо-

ложные ветви. Однако можно непрерывно перейти и от нижней ветви 5 к верхней, оставаясь в области неустойчивости. Для этого нужно обойти точку кратности, как это указано стрелкой на рис. 30. Именно наличием точки кратности и обусловлен такой сложный характер области неустойчивости. Чтобы пояснить картину, на рис. 31 показаны зависимости  $Y(\alpha)$  для значений  $R$ , отмеченные на рис. 30 сечениями  $A, B, C, D$ . Сечению  $A$  соответствует единственная спектральная мода  $Y(\alpha)$  в области неустойчивости. При увеличении  $R$  сближаются две моды, как показано сплошной и пунктирной линиями  $B$ . Они смыкаются при  $R=115$  и в этой точке кратности обмениваются ветвями, как это иллюстрируют сплошная и пунктирная линии  $C$ . Теперь в области неустойчивости существуют две спектральные моды, образующие два неперекрывающихся диапазона волновых чисел, отвечающих нарастающим возмущениям. Сечения проведены для  $\beta=0,47$ . Из рис. 30 видно, что эти диапазоны в сечении  $C$  не перекрываются. Подобное происходит при больших  $R$ . Точка кратности при  $\beta=0,47$  лежит пока ниже уровня  $Y=0$ , с этим связан островок устойчивости внутри петли 1. При больших  $\beta$  точка кратности поднимается в область неустойчивости и нейтральные кривые принимают вид 4, 5.

Область неустойчивости геометрически имеет вид части плоскости, где сделан надрез, края которого затем надвинуты друг на друга. Такой двулиственный характер области неустойчивости сохраняется с увеличением  $\beta$  вплоть до предельного случая кругового течения Куэтта, о чем ранее не было известно.

Попытаемся дать физическую интерпретацию полученным результатам. Заметим, что обе ветви кривой 5, ограничивающие зону перекрытия, уходят в область малых  $\alpha$  при  $R \rightarrow \infty$ , т. е. ведут себя так же, как и ветви обычной нейтральной кривой в случае вязкой неустойчивости. Это говорит о вязком характере неустойчивости в области перекрытия. Поэтому картину потери устойчивости, соответствующую кривым 4 и 5, можно трактовать следующим образом. При числе Рейнольдса, превышающем значение  $R$ , отвечающее носу кривой 4, развивается вторичный тейлоровский режим.

Если считать амплитуду вихрей малой и исследовать устойчивость, пренебрегая вторичным течением, то при значении числа Рейнольдса, превышающем  $R$ , для носика кривой 5, на фоне тейлоровского режима разовьется вязкая неустойчивость, что качественно согласуется с наблюдениями, как это показано далее.

Рассмотрим неосесимметричные возмущения. Для кругового течения Куэтта они изучались в работе [422] для узкого зазора, где показано, что наиболее опасны осесимметричные возмущения. Для широкого зазора это не так. Для малых скоростей вращения внутреннего цилиндра ( $\beta \leq 0,004$ ) при  $\xi = 1$  наиболее опасны возмущения с  $m = 2$ , которые порождают вязкую неустойчивость. Но с ростом  $\beta$  доминировать начинает конвективная неустойчивость. На рис. 28 пунктирными линиями 5 и 6 нанесены зависимости  $T_c(R)$  для возмущений с  $m = 1$  и 2. Возмущения с  $m \geq 3$  затухают во всем диапазоне чисел  $R$  и  $T$ .

Для  $\beta > 0,45$  нейтральные кривые для  $m = 1$  и 2 имеют такой же вид, как и для  $m = 0$ . Небольшое отличие состоит в том, что на нижних ветвях кривых типа 4 на рис. 30 при  $R \rightarrow \infty$  волновое число стремится не к нулю, а к конечному значению и, так как вдоль обеих ветвей кривой типа 5  $\alpha \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , эти кривые пересекаются.

Качественная перестройка кривых устойчивости на плоскости  $(\alpha, R)$  происходит для  $m = 1$  при  $\beta = 0,45$ , а для  $m = 2$  при  $\beta = 0,4$ . Сначала образуются две вторичные нейтральные кривые, которые с уменьшением  $\beta$ , в свою очередь, раздваиваются. Зависимости 5 и 6 на рис. 28 отвечают минимальным значениям  $R$ , на всем семействе нейтральных кривых. Интересно отметить, что при больших числах Рейнольдса критические числа Тейлора практически постоянны для трехмерных возмущений. Для  $m = 1$ ,  $T_c = 7,3 \cdot 10^4$ , а для  $m = 2$   $T_c = 2 \cdot 10^4$ . При этом  $\alpha \cdot R$  тоже остается величиной постоянной (так, для  $m = 2$   $\alpha \cdot R = 224$ ). Поскольку отсюда следует, что при  $R \rightarrow \infty$   $\alpha \rightarrow 0$ , то нейтральные возмущения и вторичные тейлоровские вихри практически не зависят от осевой координаты. Такого типа азимутальные возмущения наблюдались экспериментально [522].

Определяющая роль трехмерных возмущений в развитии неустойчивости проявляется только при достаточно больших числах Рейнольдса. При  $R > 40$  наиболее опасны возмущения с  $m=2$ , в диапазоне  $28 < R < 40$  доминируют возмущения с  $m=1$ , и только при  $R < 28$  неустойчивость впервые обнаруживается на осесимметричных возмущениях с  $m=0$ . Отсюда, в частности, следует, что при отсутствии осевого потока неустойчивость для  $\xi=1$  связана с осесимметричными возмущениями. Это свойство сохраняется и при других  $\xi \geq 1$ . Полученные результаты хорошо согласуются с данными работ

[320, 321, 533] по устойчивости кругового течения Куэтта для широкого зазора.

Данные для  $\xi=1$  по устойчивости к возмущениям с  $m=0, 1, 2$  сведены на рис. 32. Области устойчивости расположены ниже и левее соответствующих кривых. С уменьшением зазора между цилиндрами роль трехмерных возмущений уменьшается и при  $\xi > 7$  во всем диапазоне чисел  $R$  и  $T$  наиболее опасные возмущения осесимметричны. Таким образом, диаграмма неустойчивости на рис. 27 не изменится при учете произвольных возмущений. Кривые типа 1 и 2 пересекаются при  $\beta=0,091$ . Это число остается практически постоянным для всех  $\xi > 1$ , а в

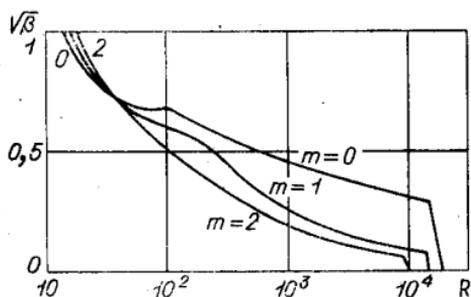


Рис. 32.

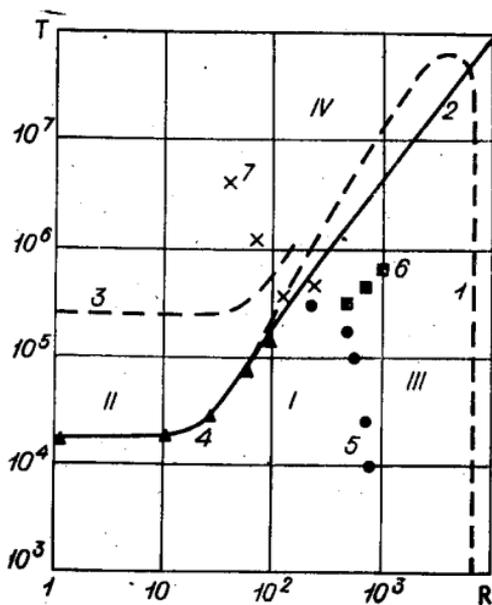


Рис. 33.

полном диапазоне изменения  $\xi$  хорошо описывается зависимостью  $\beta = 0,0915 [1 - \exp(-3,2\xi)]$ . С увеличением зазора конвективная неустойчивость становится преобладающей во все большем диапазоне чисел Рейнольдса, а влияние осевого потока на величину критического числа Тейлора делается все менее заметным.

Полученные результаты интересно сравнить с экспериментальными данными. В опытах [526] при исследовании устойчивости спиральных течений наблюдались четыре режима движения:

1. Исходный ламинарный (поле скорости зависит только от  $r$ ), реализующийся при малых числах Рейнольдса и Тейлора, — область I на рис. 33.

2. Вторичный ламинарный с вихрями Тейлора, ему соответствуют умеренные  $T$  и малые  $R$  — область II.

3. Чисто турбулентный, когда  $T$  малы, а  $R$  велики, — область III.

4. Тейлоровские вихри на фоне развитой турбулентности, наблюдаемые при больших  $T$  и  $R$ , — область IV.

Все эти режимы можно интерпретировать на основе анализа устойчивости. На рис. 33 отражены как расчетные, так и экспериментальные данные для узкого зазора. Точки 4 взяты из работы [526], а точки 5—7 — из работ [271, 411]. Линии 1—3 отвечают расчетным данным для вязкой неустойчивости, причем линия 3 соответствует носу кривых типа 5 на рис. 30, а кривая 2 — тейлоровской неустойчивости.

Из рис. 33 видно, что при малых  $R$  расчетные и экспериментальные данные о тейлоровской неустойчивости хорошо согласуются (кривая 2 и точки 4). Известно [248], что тейлоровская неустойчивость характеризуется мягким возбуждением, поэтому критические параметры, определенные по линейной теории, будут критическими для любых возмущений. Таким образом, совпадение линейной теории и эксперимента закономерно.

При числах  $R > 100$  уже наблюдается заметное расхождение по критическим числам Тейлора. Однако следует отметить, что гораздо лучше совпадают с опытом результаты, соответствующие кривой 2, по сравне-

нию с кривой 1. Это связано не столько с различием в числах Тейлора, сколько с критическими волновыми числами. В диапазоне  $0 < R < 260$ , по опытным данным,  $\alpha_*$  возрастает от 3,12 до 7,5. Вдоль кривой 2 в этом же диапазоне значений  $R$  величина  $\alpha_*$  изменяется от 3,12 до 7,9, в то время как на кривой 1 происходит уменьшение  $\alpha_*$  до 2.

При  $R \approx 300$  экспериментальные и расчетные данные уже расходятся в 1,5—2 раза. По-видимому, это связано с жестким возбуждением тейлоровской неустойчивости при таких числах Рейнольдса. Это значит, что для конечных возмущений критический параметр имеет меньшую величину, чем для малых. Тогда экспериментальные числа Тейлора должны быть меньше расчетных, что и наблюдается.

При числах  $R \geq 400$  сначала происходит турбулизация течения, т. е. первой развивается вязкая неустойчивость с жестким характером возбуждения [8]. В этих условиях линейная теория дает сильно завышенные значения критических параметров. Если кривую 1 на рис. 33 сместить влево и вниз, то ее можно совместить с точками 5, так что качественно теория все же верно отражает опытные факты.

После турбулизации течения в опытах наблюдалась вторичная перестройка потока, связанная с появлением на фоне турбулентного режима крупномасштабных тейлоровских вихрей. Этой вторичной неустойчивости соответствуют точки 6. Для теоретического анализа данного явления необходимо исследовать на устойчивость развитый турбулентный режим. Тем не менее существует качественное соответствие точек 6 с расчетной кривой 2.

С другой стороны, после наступления тейлоровской неустойчивости на фоне развитого вторичного ламинарного режима, по опытным данным [271], возбуждается вязкая неустойчивость, которая приводит к турбулизации течения. Этой вторичной неустойчивости отвечают точки 7. Согласие между этими точками и кривой 3, описывающей вторичную неустойчивость без учета тейлоровских вихрей, довольно отдаленное, но существен сам факт ее предвидения.

Интересно отметить, что турбулизация течения ускоряет наступление конвективной неустойчивости, а наличие тейлоровских вихрей тормозит развитие турбулентности.

Таким образом, осесимметричные течения дают весьма содержательный материал по гидродинамической устойчивости. Один из наиболее важных моментов заключается в том, что конвективная неустойчивость связана с появлением новых упорядоченных режимов, интенсивность которых нарастает постепенно, тогда как вязкая неустойчивость, как правило, ведет к каскаду новых неустойчивостей, что приводит к развитию турбулентного режима течения.

## § 6. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ И СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

На примере осесимметричных потоков мы видели, что геометрические особенности области течения сказываются как на критических характеристиках, так и на спектре малых возмущений. Другим важным для приложений классом течений, геометрия которых отличается от базовых, являются течения в пограничном слое и затопленные струйные потоки. Их особенность заключается в неограниченности области течения в поперечном направлении, что сказывается на характеристиках устойчивости, главным образом на структуре спектра.

Проблема устойчивости пограничных слоев в силу своего большого прикладного значения — одна из центральных в теории гидродинамической устойчивости. Собственно, первая нейтральная кривая была построена Толлмином [553] именно для течения в пограничном слое. Вышедшая сравнительно недавно монография [135] освобождает нас от подробного обзора.

Неограниченность области течения не дает качественно новых результатов в поведении нарастающих возмущений. Форма нейтральной кривой для выпуклых профилей имеет обычный петлеобразный вид. Существенно новое явление по сравнению с течениями в каналах и трубах — конечность числа спектральных мод при

фиксированных значениях  $\alpha$  и  $R$ . Оценки, проведенные Слепцовым [209], показывают, что собственные значения уравнения Орра — Зоммерфельда для течения Блазиуса лежат внутри области  $\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ :

$$\Sigma_1 = \{a^2 + b^2 + a\sqrt{(a^2 + b^2)} \leq 2M^2\};$$

$$\Sigma_2 = \{a^2 + b^2 \leq (\alpha R M^2)^2\}; \quad \Sigma_3 = \{a^2 + b^2 \leq 16\alpha^2/R^2\};$$

$$a = Y + \alpha/R; \quad b = X - 1; \quad M = 4,5 + 2,5 \min [N_2/\alpha^2 (\operatorname{ch} \alpha - 1), N_2 \operatorname{sh} \alpha/\alpha]; \quad (1)$$

$$N_1 = \max |U''|; \quad N_2 = \int_0^1 |U''| dy.$$

Поскольку собственные значения не имеют точек сгущения и заключены в ограниченной области, число их конечно. С уменьшением  $\alpha$  при заданном  $R$  область сокращается, можно предположить, что сокращается и число собственных значений. Действительно, при  $\alpha$ , достаточно больших, в силу свойств локальности пристенные собственные значения не зависят от граничных условий, и, следовательно, их число  $n$  достаточно велико и с ростом  $\alpha$  возрастает. С другой стороны, легко убедиться, что при  $\alpha=0$  уравнение Орра — Зоммерфельда для неограниченной области не имеет собственных значений. Эти качественные соображения свидетельствуют в пользу того, что с ростом  $\alpha$  собственные значения «возникают» по одному и существует характерная величина  $\alpha_n(R)$ , такая, что при  $\alpha < \alpha_n$  нет ни одного собственного значения. Иллюстрацией и подтверждением такой картины является численный расчет спектра малых возмущений течения Блазиуса при  $R=10^3$  (рис. 34 [139]).

Задача решалась в плоскопараллельном приближении. Профиль скорости  $U(y)$  находился интегрированием уравнения Блазиуса

$$2\Psi_0''' + \Psi_0\Psi_0'' = 0; \quad 0 \leq y \leq \infty; \quad (2)$$

$$\Psi_0 = \Psi_0' = 0 \text{ при } y = 0; \quad \Psi_0' \rightarrow 1 \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

После интегрирования (2) определялся профиль скорости  $U = \Psi'$  и толщина вытеснения

$$\delta_* = \int_0^{\infty} (1 - U) dy$$

выбиралась в качестве нового масштаба длины. Затем анализ устойчивости проводился в рамках уравнения Ора — Зоммерфельда.

$$v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v = i\alpha R X \times [(U - C)(v'' - \alpha^2 v) - U''v]; \quad 0 \leq y \leq \infty; \quad (3)$$

$$v = v' = 0 \text{ при } y = 0; \quad v \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

При численном интегрировании бесконечный интервал приходится заменять на достаточно большой, но конечный. Следуя процедуре, предложенной впервые, по-видимому, Брауном [269] (см. также [211]), выделим два подынтервала:  $0 < y < y_1$  и  $y_1 < y < \infty$ . В интервале  $y_1 < y < \infty$  будем считать  $U'' = 0$ , а  $U \equiv 1$ . Тогда уравнение (3) сводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$(d^2/dy^2 - \alpha^2) \{d^2/dy^2 - [\alpha^2 + i\alpha R(1 - C)]\} v = 0,$$

общее решение которого, удовлетворяющее условиям на бесконечности, имеет вид

$$v = C_1 \exp(-\alpha y) + C_2 \exp(-\gamma y);$$

$$\gamma = \gamma_r + i\gamma_i; \quad \gamma_r = \sqrt{\{[\sqrt{(a^2 + b^2)} + a]/2\}};$$

$$\gamma_i = \sqrt{\{[\sqrt{(a^2 + b^2)} - a]/2\}} = b/(2\gamma_r); \quad (4)$$

$$a = \alpha^2 + \alpha R Y; \quad b = \alpha R(1 - X).$$

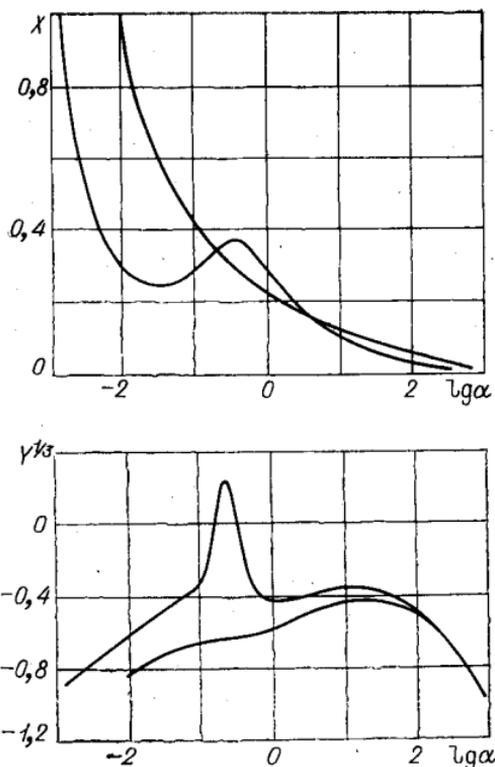


Рис. 34.

Исключая константы  $C_1$  и  $C_2$ , заменим (4) двумя дифференциальными связями:

$$\begin{aligned} (v'' - \alpha^2 v)' + \gamma(v'' - \alpha^2 v) &= 0; & (v'' - \gamma^2 v)' + \alpha(v'' - \\ & - \gamma^2 v) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

которые могут служить граничными условиями для внутреннего подынтервала при  $y=y_1$ . С увеличением  $y_1$  точность такой аппроксимации возрастает. Практика расчетов показала, что величина  $y_1=5$  вполне достаточна и при увеличении  $y_1$  результаты уже не меняются.

Фиксируем  $R$  и будем уменьшать  $\alpha$ . При достаточно малых  $\alpha$  величина  $a$  становится отрицательной, а  $X$  стремится к своему «среднему» значению, равному единице. Легко убедиться, что при переходе  $X$  через единицу граничные условия меняются скачком. Действительно, при  $b=0$   $\gamma_i = \sqrt{|a|}$  и непрерывно изменяется, когда  $X$  переходит через единицу ( $a$   $b$  — через нуль), если не менять знак у радикала. Но при  $X > 1$  величина  $b < 0$ , и если  $\gamma_i$  сохраняет знак, то в силу  $\gamma_r = b/2\gamma_i$  сменить знак должна и величина  $\gamma_r$ . Поскольку значения  $\gamma_r < 0$  отвечают нарастающим на бесконечности возмущениям, для выполнения условий затухания величина  $\gamma_i$  должна скачком менять знак. Таким образом, граничные условия изменяются скачком и продолжить спектр непрерывно через точку  $\alpha = \alpha_n$ , где  $X$  достигает 1, невозможно.

Спектральные уровни, показанные на рис. 34, рассчитывались в два приема. Сначала при фиксированном  $\alpha \gg 1$  вычислялся переход от течения в канале к течению в пограничном слое непрерывным изменением граничных условий с помощью вспомогательного параметра. Затем определялись спектральные ветви в сторону меньших  $\alpha$ . Характерная особенность течения Блазиуса — отсутствие внешних мод: все спектральные возмущения с ростом  $\alpha$  локализуются у стенки. Если в процессе перехода от условий в канале к условиям пограничного типа отправляться от приосевой моды, то собственное значение «исчезает», когда фазовая скорость достигает единицы при промежу-

точном значении параметра. Однако искажение профиля скорости во внешней части или недостаточно гладкое его сопряжение с  $U \equiv 1$  при  $y = y_1$  приводит к появлению собственных функций, локализуемых в этой области, что подробно будет проиллюстрировано при анализе устойчивости турбулентных течений.

Еще один пример, когда неограниченность поперечного размера потока приводит к интересным эффектам,— течение типа затопленных струй. Наиболее известно автомодельное решение Бикли—Шлихтинга для профиля

$$U = 1 - th^2 y, \quad (6)$$

а также профиля

$$U = \exp(-y^2), \quad (7)$$

обычно используемого для описания следа за плохо обтекаемым телом [239], а также для турбулентных струй. Эти профили довольно близки и обладают сходными свойствами устойчивости.

Развитие неустойчивости для следа аналитически было изучено Архиповым [10]. Асимптотическими методами устойчивость струи исследовали Керль [303], Тацуми и Какутани [549], Говард [377]. Невязкий анализ струи и следа был предпринят Бетчовым и Криминале [15, 260]. Влияние характера граничных условий на параметры устойчивости анализировал Икэда [387]. Численный расчет нейтральных кривых для струи проводили Кленшоу и Эллиот [292], Каплан [408], Сопруненко [211]. Расчет декрементов, временных и пространственных, был проделан Ко и Лессеном [417], Калугиным и Чечко [97], ряд исследований провели Желтухин и Терехова [83, 219] и другие авторы [27, 148, 149, 291].

В этих исследованиях рассчитанные критические числа Рейнольдса колебались в определенном диапазоне, но наибольший разброс наблюдался при малых волновых числах. На трудности расчета при малых  $\alpha$  ссылаются и авторы монографии [15]. Характер граничных условий, конечно, весьма существен для длинноволновых возмущений. Икэда [387], например, для ряда граничных условий получил нулевое значение

критического числа Рейнольдса, а по расчетам Тереховой, с граничными условиями (5) при  $y = \pm a$  зависимость  $R_*(a)$  имеет минимум при  $a \approx 6$ , равный 4.

Экспериментальные исследования по устойчивости плоской затопленной струи проводились Андраде [255], Сато и Сакао [512—514]. По их данным,  $R_* = 9,5—10$ , что несколько превышает прогноз линейной теории ( $R_* = 4—7$ ). Расчеты Ко и Лессена [417] с учетом поправки на непараллельность потока дали  $R_* \approx 12$ . Следует, однако, иметь в виду, что в силу пространственного развития возмущений и сноса их вниз по течению, а также из-за мягкого характера возбуждения колебательного режима переход к турбулентности в струях и пограничных слоях наступает, как правило, ниже по течению того места, с которого начинают возрастать малые возмущения.

При использовании граничных условий в форме (5) собственные значения вырождаются при малых  $\alpha$ . При  $y = \pm a$  ставились условия прилипания, и величина  $a$  выбиралась достаточно большой. Такой подход, с одной стороны, позволил ликвидировать спектральные трудности, ибо для любого конечного  $a$  спектр счетен и при малых  $\alpha$  известен. С другой стороны, поскольку характерные числа Рейнольдса сравнительно невелики — выбор характерных масштабов ясен из (6), (7), то даже при весьма больших  $a$  ( $\sim 10^2$ ) не требуется значительных затрат машинного времени.

Результаты расчета нейтральных кривых для струи и следа при  $a = 6$  представлены на рис. 35,  $a, б$  (1 и 4 соответственно). Критическими параметрами для струи являются  $R_* = 6,25$ ;  $\alpha_* = 0,46$ ;  $X = 0,16$ . Для следа отличие в нейтральных кривых  $\alpha = \alpha(R)$ ,  $X = X(R)$  незначительно по сравнению со струей, поэтому в дальнейшем мы ограничимся анализом устойчивости струи.

Диапазон неустойчивости по волновым числам при  $R \rightarrow \infty$  стремится к  $0 < \alpha < 2$ . Максимальная скорость нейтральных колебаний достигается на верхней ветви при  $\alpha = 2$  и равна  $2/3$ . Это значит, что критическая точка  $y_c$  совпадает с точкой перегиба на профиле скорости, которая определяется дифференцированием (6)

$$U = 2(3\text{th}^2 y - 1)(1 - \text{th}^2 y),$$

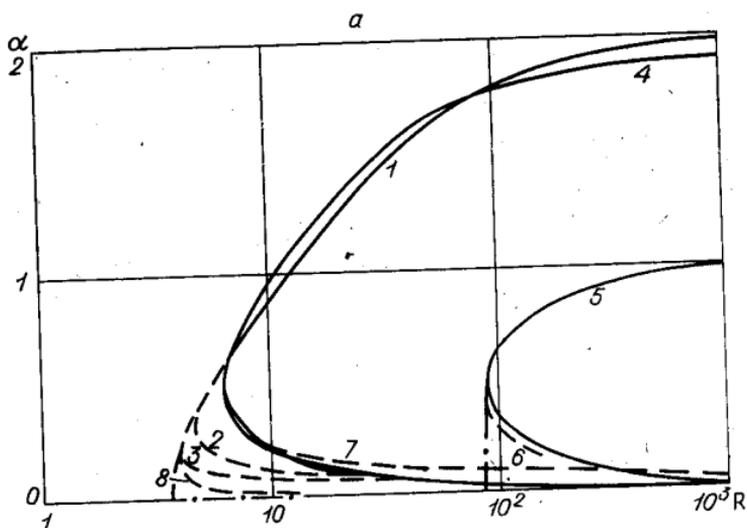


Рис. 35.

откуда следует, что кривизна меняет знак при  $\text{th } y = 1/\sqrt{3}$ , когда  $U = X = 2/3$ .

Интересная особенность течений струйного типа в канале — наличие возмущений с отрицательной фазовой скоростью, распространяющихся вверх по потоку. Для струи фазовая скорость достигает минимального значения  $X = -1/3$  на нижней ветви нейтральной кривой. Кривая 7 на рис. 35, а соответствует нарастающим возмущениям с  $X = 0$ .

Заметим, что отрицательность фазовой скорости не противоречит оценкам (I.1.3) и следует из (I.1.8) для малых  $\alpha$ . Действительно, в выражении  $X_{2n-1}$  подынтегральное выражение в скобках отрицательно при малых  $y$ , и, поскольку профиль скорости отличен от нуля лишь в малой окрестности ( $y = 0$ ), фазовая скорость будет отрицательной. С ростом спектрального номера  $n$  фазовые скорости при  $\alpha = 0$  стремятся к средней скорости течения (по ширине канала). С ростом  $\alpha$  возмущения разделяются на приосевые и пристенные. В силу свойств локальности при больших  $\alpha$  собственные значения для симметричных (нечетных) и антисимметричных (пристенных) возмущений сливаются. Для осевых возмущений такое слияние, естественно, не наблюдается. Антисимметричные возмущения становятся нарастающими при достаточно больших  $R$  (см. рис. 35, а, б, кривые 5). Носику нейтральной кривой для антисимметричных возмущений отвечают параметры  $R = 90$ ;  $\alpha = 0,47$ ;  $X = 0,7$ . Вдоль нижней ветви при  $R \rightarrow \infty$  величина  $\alpha R \rightarrow 26,3$ ;  $X \rightarrow 1 - 1/a \approx 0,84$ . Критические точки нарастающих антисимметричных возмущений расположены во внутренней части потока между точками перегиба, а симметричных возмущений — во внешней зоне.

Отрицательность фазовых скоростей при малых  $\alpha$  обусловлена присутствием стенок и является чисто вязким эффектом. Вдоль нижней ветви нейтральной кривой величина  $\alpha R$  для симметричных возмущений стремится к постоянному значению, равному примерно 2. Поскольку при  $\alpha \rightarrow 0$  уравнение Орра — Зоммерфельда принимает вид

$$v'' = i\alpha R [(U - C)v'' - U''v],$$

то при  $\alpha R = \text{const}$  вязкий член остается существенным для бесконечно больших чисел Рейнольдса. С другой стороны, вдоль линий 7 на рис. 35, а  $\alpha \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ . Таким образом, диапазон волновых чисел, отвечающий отрицательным фазовым скоростям, при  $R \rightarrow \infty$  стягивается в точку, что и подчеркивает вязкую природу встречных волн. Поэтому неудивительно, что в чисто невязком анализе [253] не было обнаружено колебаний с  $X < 0$ .

Иллюстрацией сказанному могут служить дисперсионные зависимости  $X(\alpha)$  (рис. 36). Кривая 1 отвечает нейтральным колебаниям, а кривая 5 — случаю  $R = \infty$ . В диапазоне неустойчивости расчеты хорошо согласуются с результатами Бетчова и Криминале [260], различие заключается в том, что в пределе  $R \rightarrow \infty$  кривая 5 имеет излом в начале координат и продолжается по оси  $\alpha = 0$  до пересечения с кривой 1. На

вертикальном участке величина  $\alpha R$  меняется от 2 в точке пересечения с кривой 1 до  $\infty$  в начале координат. Фазовые скорости антисимметричных возмущений показаны кривыми 6 (нейтральные возмущения) и 7 ( $R = \infty$ ).

Декременты возмущений  $Y(\alpha)$  при  $R = \infty$  нанесены на рис. 37 (кривая 1 для симметричных и кривая 2 для антисимметричных возмущений).

Этот график примечателен тем, что иллюстрирует наиболее разительное расхождение между чисто невязким и предельно невяз-

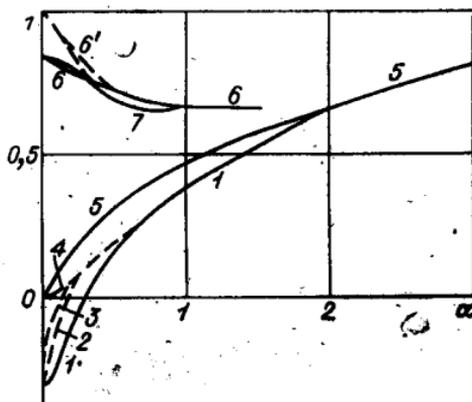


Рис. 36.

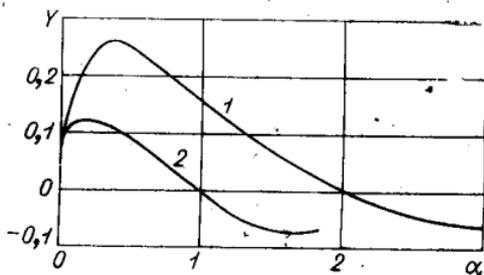


Рис. 37.

ким анализом. Если для нарастающих возмущений декременты в обоих случаях совпадают, то при  $\alpha > 2$  в чисто невязком случае  $Y=0$ , а в предельном  $Y$  стремится к конечным отрицательным значениям. Таким образом, несовпадение фиксируется и в случае  $\alpha R \rightarrow \infty$ . Это расхождение можно ликвидировать, если расширить задачу в плоскость комплексной переменной  $y$  и при отыскании собственного значения интегрирование проводить не по вещественной оси, а обходя критическую точку снизу [137]. Тогда невязкая задача потеряет свойства симметрии относительно  $Y$  и будет иметь собственные значения, совпадающие с предельными при  $\alpha R \rightarrow \infty$  (но различие задач неустранимо, если в вязком случае  $\alpha R \rightarrow \text{const}$  при  $R \rightarrow \infty$ ).

Будем теперь увеличивать размер канала  $a$  и проследим, к каким изменениям это приведет. На рис. 35 и 36 линиями 2, 3 показаны нейтральные зависимости для  $a=12$  и 24 соответственно, линии 8 на рис. 35, а и 7 на рис. 35, б отвечают  $a=100$ . Линии 6 на этих рисунках и 6' на рис. 36 соответствуют антисимметричным нейтральным колебаниям при  $a=12$ . В пределе для симметричного случая  $\alpha_* \rightarrow 0$ ;  $X_* \rightarrow 0$ ;  $R_* \rightarrow 4$  при  $a \rightarrow \infty$ . В носике нейтральные кривые приобретают излом. Верхняя ветвь меняется по корневому закону  $\sim \sqrt{R-R_*}$  вблизи носика, а нижняя совпадает с осями  $\alpha=0$ ;  $X=0$ . Такой специальный вид нейтральной кривой не был обнаружен ранее, видимо, из-за трудностей анализа при малых  $\alpha$  для граничных условий (5). Форма нейтральной кривой близка к случаю сдвигового слоя  $U=th y$  с той разницей, что здесь критическое число Рейнольдса отлично от нуля.

Равенство нулю фазовой скорости в критической точке означает, что возмущения не сносятся по потоку, а нарастают во времени при  $R > R_*$ . Так как и  $\alpha$  обращается в нуль, то нейтральные возмущения лишь стационарным образом деформируют профиль струи.

Применение данного анализа к затопленным струям непроводящей жидкости ограничено, поскольку плоскопараллельное приближение несправедливо для достаточно длинноволновых возмущений. Полученные результаты могут быть применимы для струй проводя-

щей жидкости в продольном магнитном поле, ибо струя в этом случае становится более дальнобойной, а длинноволновые возмущения практически не взаимодействуют с полем.

### § 7. УСТОЙЧИВОСТЬ МГД-ТЕЧЕНИЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Магнитогидродинамические течения (МГД) представляют большой интерес не только в связи с техническими приложениями (МГД-генераторы, насосы и другие устройства), но и в связи с тем, что их анализ помогает уточнить некоторые общие гидродинамические проблемы. В случае малых магнитных чисел Рейнольдса роль магнитного поля в основном сводится к внешнему управляющему воздействию. Профиль скорости движущейся проводящей жидкости можно деформировать наложением магнитного поля и проследить, как меняются характеристики устойчивости. Кроме того, приложив поле перпендикулярно плоскости течения, можно выборочно воздействовать на трехмерные возмущения, так что основное течение и двумерные возмущения с полем взаимодействовать не будут. Как показывают экспериментальные исследования [102], это позволяет реализовать «двумерную» турбулентность, обладающую некоторыми характерными особенностями.

Проблемам магнитной гидродинамики посвящен ряд монографий советских ученых [20, 29, 119, 230], но исследование устойчивости МГД-течений — это сравнительно новое научное направление. Локк [443] асимптотическими методами исследовал устойчивость течения в канале при наличии поперечного поля. Рассматривалось приближение больших чисел Гартмана ( $Ha \gg 1$ ). В этом приближении задача совпадает со случаем асимптотического течения в пограничном слое с равномерным отсосом [99]. Критическое число Рейнольдса связано с числом Гартмана зависимостью

$$R_* = 5 \cdot 10^4 Ha. \quad (1)$$

Коэффициент в (1) в дальнейшем был несколько уточнен [382]. В работе [174] авторы пришли к выводу, что результаты Локка можно экстраполировать вплоть до магнитных чисел Рейнольдса  $R_m \sim 1$ .

Устойчивость течения Куэтта в поперечном поле изучалась Павловым [170] и Какутани [406]. В статье Павлова был получен ошибочный результат, что отмечено в работе [195]. Тверской [218] в рамках некоторых приближений анализировал предельный случай больших  $R$  и  $R_m$  и обнаружил неустойчивость, однако определить критические значения параметров ему не удалось.

Случай продольного поля впервые был рассмотрен Микаелем [451], который, правда, пришел к ошибочному выводу о справедливости теоремы Сквайра для этого течения. Эта ошибка даже попала в обзор [548] и книгу [15], пока в работе Ханта [384] не была исправлена. Опираясь на расчеты Стюарта [541], Хант получил для больших  $Na$  асимптотическую зависимость

$$R_* = 450 Na. \quad (2)$$

Сопоставляя (1) и (2), мы видим, что поперечное поле оказывает примерно в 100 раз большее воздействие на поток. Это связано с деформацией профиля скорости и еще раз подчеркивает определяющее влияние формы профиля на его устойчивость.

Случай конечного магнитного числа Рейнольдса с использованием разных допущений исследовался в работах [30, 216, 416, 532]. Он детально проанализирован Сагалаковым [191—194], который обнаружил новый тип неустойчивости при  $R_m \gg 1$ .

Влияние трансверсального, т. е. перпендикулярного плоскости течения, поля исследовалось Вулером [573].

Абас [254] рассмотрел гартмановский пограничный слой в продольном магнитном поле. В обзоре [232] указывалось, что нуждается в исследовании случай наклонного поля. Этот пробел восполнила работа [144], результаты которой излагаются ниже.

В работе Дразина [323] были получены достаточные условия устойчивости к двумерным возмущениям в па-

раллельном поле. Хейнсом [362] обсуждался вид нейтральных кривых.

Устойчивость струи в магнитном поле анализировалась Дразиным [324] и Робертсом [509]. В работе [34] изучено влияние продольного поля на течение в кольцевом канале.

В настоящей работе упор делается на гидродинамическую сторону проблемы МГД-устойчивости, поэтому изучается только случай малых магнитных чисел Рейнольдса, что, впрочем, выполняется практически во всех МГД-устройствах.

Уравнения магнитной гидродинамики имеют вид

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_k} + \frac{1}{R} \Delta V_k + A H_j \frac{\partial H_k}{\partial x_j}; \quad \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0;$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial t} + V_j \frac{\partial H_k}{\partial x_j} - H_j \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = \frac{1}{R_m} \Delta H_k; \quad \frac{\partial H_j}{\partial x_j} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $R_m = 4\pi \sigma V_0 L_0 / c^2$  — магнитное число Рейнольдса;  $A = H_0^2 / 4\pi \rho V_0^2$  — число Альфвена;  $\sigma$  — проводимость;  $\rho$  — плотность жидкости;  $H_0$ ,  $V_0$ ,  $L_0$  — характерные масштабы напряженности магнитного поля, скорости и длины;  $c$  — скорость света. Полезно ввести число Гартмана  $Ha$ , связанное с другими критериями соотношением  $Ha^2 = AR_m R$ . Разыскивая стационарное одномерное течение  $V_k = \{U(y); 0; 0\}$  и полагая внешнее магнитное поле однородным, получим уравнения

$$U'' + AR H_y H_x' = R dP/dx;$$

$$H_x'' + R_m H_y U' = 0; \quad H_z = \text{const}, \quad H_y = \text{const},$$

которые имеют общее решение вида

$$U = C_1 \text{sh } Gy + C_2 \text{ch } Gy + G_3 \quad (G = Ha H_y);$$

$$H_x = -R_m / G \cdot (C_1 \text{ch } Gy + C_2 \text{sh } Gy) + C_4 y + C_5.$$

Наиболее важные случаи следующие.

### 1. Течение Гартмана:

$$U = [\text{ch } G - \text{ch } (Gy)] / (\text{ch } G - 1);$$

$$H_x = R_m / G \cdot [\text{sh } (Gy) - C_4 y] / (\text{ch } G - 1); \quad -1 \leq y \leq 1. \quad (4)$$

Константа  $C_4$  зависит от электропроводности стенок. Масштабом скорости служит ее максимальное значение на оси канала.

✓ 2. Антисимметричное МГД-течение Куэтта:

$$U = \text{sh } Gy / \text{sh } G; H_x = R_m (C_5 - \text{ch } Gy) / (G \text{ sh } G); \quad (5)$$

✓ 3. Асимметричное МГД-течение Куэтта:

$$U = \text{sh } (Gy) / \text{sh } G; H_x = R_m / G [1 - \text{ch } (Gy)] / \text{sh } G; \\ 0 \leq y \leq 1. \quad (6)$$

Течение (6) отличается от (5) тем, что точка перегиба профиля  $y=0$  находится на стенке, а не на оси канала.

При больших значениях  $G$  эти течения вырождаются в однородный поток с узким гартмановским пограничным слоем на стенке

$$U = 1 - e^{-Gy}; y \geq 0. \quad (7)$$

Полагая  $V_k = U_k + v_k$  и обозначая возмущения магнитного поля через  $h_k$ , после стандартных выкладок получаем уравнения для возмущений

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{R} \Delta v_k + \\ + A \left( H_j \frac{\partial h_k}{\partial x_j} + h_j \frac{\partial H_k}{\partial x_j} + h_j \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \right); \quad (8)$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial t} = H_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + h_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - U_j \frac{\partial h_k}{\partial x_j} - v_j \frac{dH_k}{dx_j} + h_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \\ v_j \frac{\partial h_k}{\partial x_j} + \frac{1}{R_m} \Delta h_k; \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0; \quad \frac{\partial h_j}{\partial x_j} = 0.$$

Умножая эти уравнения на  $v_k$  и  $A h_k$  и интегрируя по области  $\Omega$ , на границе которой возмущения предполагаются отсутствующими, получим

$$dE/dt = (d/dt) \int_{\Omega} 1/2 (v_k^2 + A h_k^2) d\Omega = - \int_{\Omega} v_k v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} d\Omega + \\ + A \int_{\Omega} h_k v_j \left( \frac{\partial H_j}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial x_j} \right) d\Omega - \frac{1}{R} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega -$$

$$-\frac{A}{R_m} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega + A \int_{\Omega} h_k h_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} d\Omega. \quad (9)$$

Это уравнение будет использовано в следующей главе при энергетическом анализе МГД-течений. Но помимо этого оно позволяет сделать некоторые общие выводы. Поскольку генерационные члены в (9) для случая одномерного течения в однородном внешнем поле имеют вид

$$\int_{\Omega} [(A h_x h_y - v_x v_y) U' + A H'_x (h_y v_x - h_x v_y)] d\Omega,$$

а остальные члены в (9) связаны с вязкой и джоулевой диссипацией энергии, то возмущения с  $v_y = h_y \equiv 0$  по энергии будут монотонно затухать во времени. Это обстоятельство можно использовать для значительного уменьшения порядка системы уравнений, описывающих эволюцию возмущений.

Будем теперь полагать возмущения малыми. Проводя операцию  $\text{div}$  над первым уравнением (8), для давления  $p$  получим соотношение

$$\Delta p = 2 \left( A H'_x \frac{\partial h}{\partial x} - U' \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (10)$$

где  $h = h_y$ ;  $v = v_y$ . Действуя оператором Лапласа на уравнения для  $y$ -компоненты возмущений скорости в (8), запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta v}{\partial x} - U'' \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{R} \Delta \Delta v - A H''_x \frac{\partial h}{\partial x} + A H_j \frac{\partial \Delta h}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{1}{R_m} \Delta h + H_j \frac{\partial v}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (11)$$

Полагая, что  $v = \frac{\partial v}{\partial y} = h = 0$  при  $y = \pm 1$ , видим, что задача об определении  $v$  и  $h$  отщепилась от общей системы (8). Сделанное выше замечание о роли компонент  $v$  и  $h$  в генерации энергии возмущений позволяет свести задачу об устойчивости к анализу уравнений (11), поскольку, если  $v$  и  $h$  затухают во времени, будет затухать и энергия возмущений в целом. Еще одно существенное упрощение дает предположение о малости маг-

нитного числа Рейнольдса. Разлагая  $v$  и  $h$  в ряды

$$v = v_0 + R_m v_1 + \dots, \quad h = h_1 R_m + h_2 R_m^2 + \dots$$

и оставляя в уравнениях (11) только члены нулевого порядка по  $R_m$  (имея в виду, что  $A = Na^2 / (RR_m)$ ), получим

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta v}{\partial x} - U'' \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{R} \Delta \Delta v + \frac{Na^2}{R} H_j \frac{\partial \Delta h}{\partial x_j};$$

$$\Delta h = -H_j \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

Здесь индексы «0» и «1» опущены. Из этих соотношений можно исключить  $h$  и получить уравнение только для  $v$ , которое после Фурье-преобразования примет вид

$$i\alpha R [(U - C)(v'' - k^2 v) - Uv'] = v^{IV} - 2k^2 v'' + k^4 v - Na^2 (H_v^2 v'' + 2ikH_k H_v v' - k^2 H_k^2 v). \quad (12)$$

Здесь  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ;  $kH_k = \alpha H_x + \beta H_z$ , причем  $H_x$  — исходное постоянное, а не наведенное магнитное поле. Таким образом, мы получили несколько модифицированное уравнение Орра — Зоммерфельда.

В случае поперечного поля ( $H_k = 0$ ;  $H_v = 1$ ) уравнение (12) указывает на справедливость теоремы Сквайра, так что достаточно исследовать только двумерные возмущения.

Спектр малых возмущений для течения Гартмана в поперечном поле при  $Na = 3$  и  $R = 3 \cdot 10^5$  показан на рис. 38, а. Профиль скорости при этом числе Гартмана еще мало отличается от параболы Пуазейля, особенно в пристенной части. Спектральные номера 1, 4 отвечают пристенным возмущениям, а 2, 3, 5, 6 — приосевым. Фазовая скорость последних уже при  $\alpha \approx 0,1$  близка к единице, чему соответствует максимальное значение скорости. Обращает на себя внимание факт слияния собственных значений при малых  $\alpha$ . Сливаются собственные значения с разными условиями симметрии. Это объясняется пологостью профиля скорости вблизи оси. Критическая точка сравнительно удалена от оси, хотя фазовая скорость близка единице. При больших  $\alpha$  декре-

менты выходят на общую асимптотическую зависимость  $Y = -\alpha/R$ . Неустойчивость проявляется на первой спектральной моде при  $\alpha \sim 1$ . При этом числе  $Na$  возмущения, отвечающие другим спектральным модам, затухают во всем диапазоне  $\alpha$  и  $R$ .

С увеличением числа  $Na$  происходит своеобразная деформация спектра малых возмущений. Диапазон волновых чисел, отвечающих области неустойчивости, сдвигается в область больших  $\alpha$ . Зависимость  $Y_4(\alpha)$  имеет характерный максимум, который еще не выходит в зону неустойчивости с ростом  $R$ . Но при дальнейшем увеличении числа Гартмана это отмечается, и неустойчивость обнаруживается на двух спектральных модах, о чем свидетельствует рис. 38, б ( $Na = 10$ ;  $R = 6 \cdot 10^5$ ). Эти моды, имеющие уже номера 5 и 6, являются пристенными. С ростом  $Na$  увеличивается как спектральный номер растущих возмущений, так и волновые числа. Это связано с тем, что как в продольном, так и в поперечном направлении возмущение имеет масштаб порядка  $1/Na$ .

Расчеты спектра малых возмущений, как правило, проводились без учета члена  $Na^2 v''$  в уравнении (12), поскольку нас интересовало в первую очередь влияние формы профиля скорости на устойчивость течения. Для определения роли добавочного члена в уравнении Орра — Зоммерфельда в ряде случаев он был учтен. На рис. 38, б кривая  $b'$  рассчитана с учетом этого члена, а кривая  $b$  — без него. Добавочный член приводит к существенной стабилизации длинноволновых возмущений. Это объясняется тем, что при малых  $\alpha$  декременты удовлетворяют приближенной формуле

$$Y_n = -[1/4\pi^2(n+1)^2 + Na^2]/(\alpha R),$$

откуда видно, что при больших  $Na$  и малых  $n$  эта добавка существенна. С ростом  $\alpha$  зависимости  $b$  и  $b'$  сливаются задолго до диапазона неустойчивости, поэтому на формирование нейтральных кривых и критических чисел Рейнольдса добавочный член практически не влияет.

Из уравнения (12) следует интегральное выражение для декремента  $Y$ , аналогичное (I.1.6), которое в случае

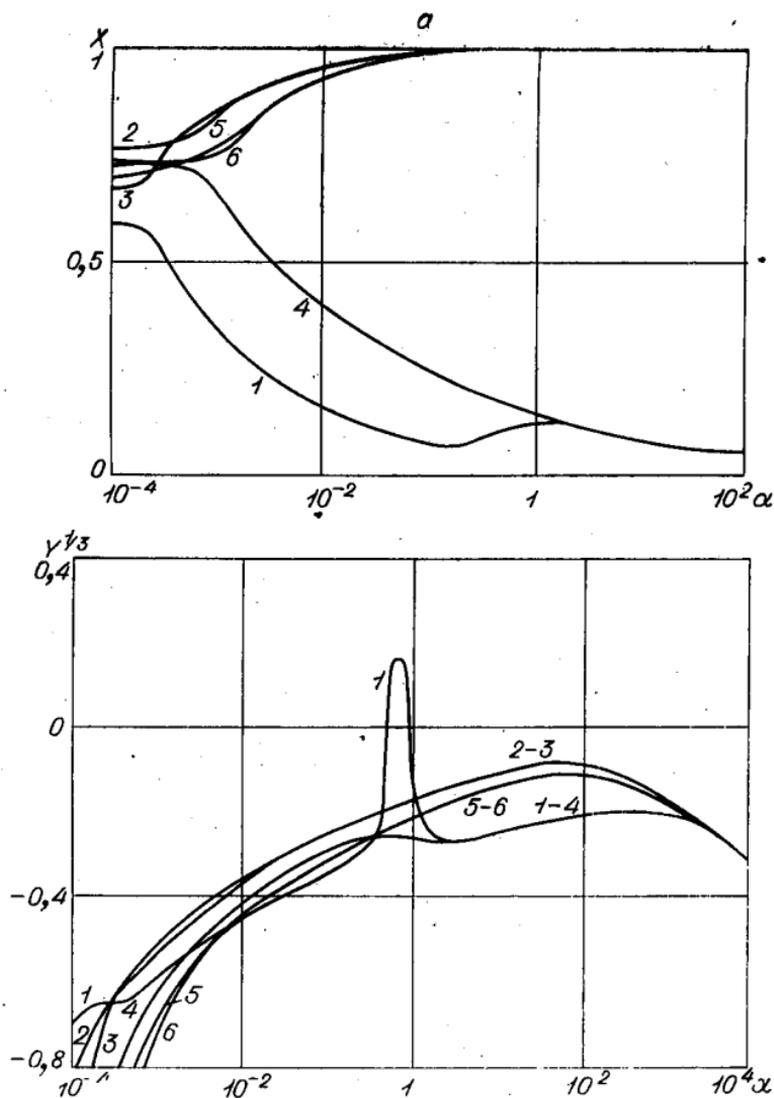
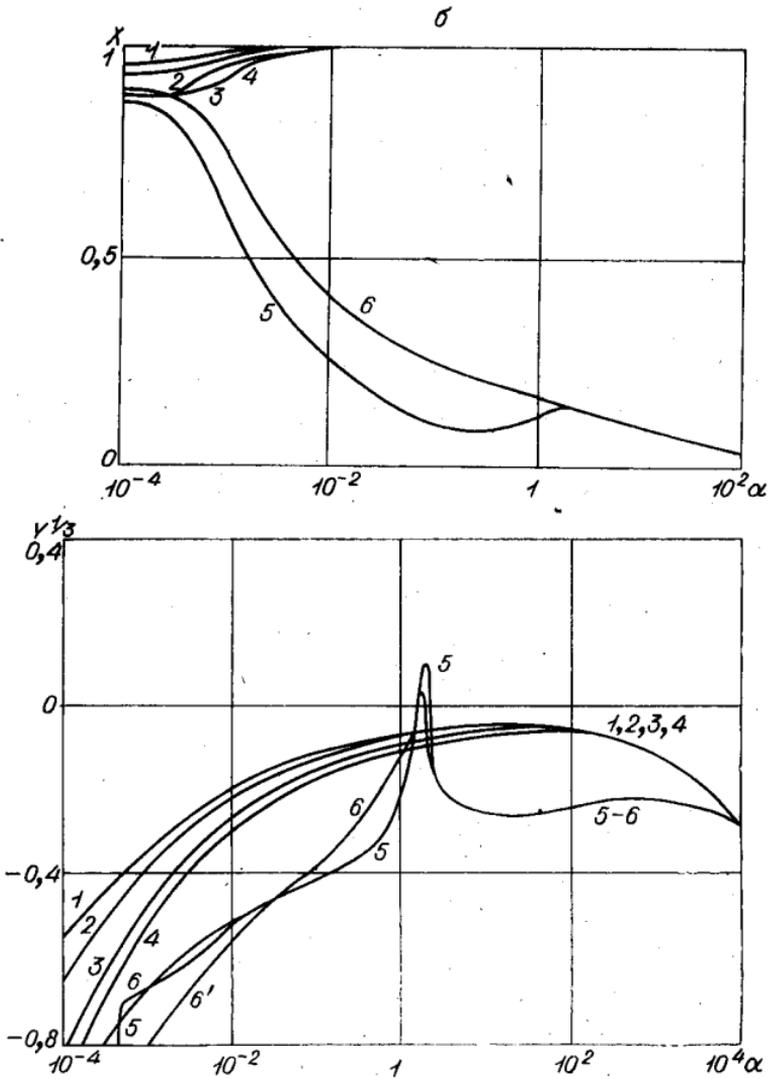


Рис. 38.

поперечного поля имеет вид

$$Y = \left[ \int_{-1}^1 U' (v_r v_i' - v_i v_r') dy - (I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^2 I_0^2 + \right. \\ \left. + \text{Ha}^2 I_1^2) / (\alpha R) \right] / (I_1^2 + \alpha^2 I_0^2).$$



Стабилизирующее влияние члена с  $\text{Na}^2$  очевидно, но при больших значениях  $\alpha R$  собственной функции присущи большие градиенты в пристенной области и основной вклад в диссипацию дает  $I_2$ , а величина  $I_2/I_1$  имеет порядок  $\alpha R$ . Поскольку  $\alpha R \approx 8000 \text{ Na}^2$ , наличие члена с  $\text{Na}^2$  не сказывается на значениях  $Y$  при волновых числах из диапазона неустойчивости и выше.

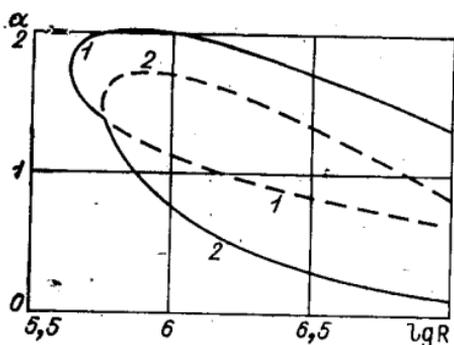


Рис. 39.

большие по модулю декременты затухания, что объясняется, с одной стороны, повышенной диссипацией из-за больших градиентов, с другой, как показывают расчеты, работа рейнольдсовых напряжений способствует перекачке энергии в основной поток. Исключение составляет сравнительно узкий (см. рис. 38, б) генерационный диапазон волновых чисел, так что зависимость  $Y(\alpha)$  имеет характерный резонансный вид.

Поскольку при  $Na=10$  нарастают возмущения как симметричной, так и антисимметричной моды, формируются две нейтральные кривые (рис. 39). Кривая 1 отвечает симметричным, а кривая 2 — антисимметричным возмущениям. Огибающая этих двух нейтральных кривых, показанная сплошной линией, ограничивает область неустойчивости. Интересно заметить, что вдоль обеих ветвей кривой 2 величина  $\alpha R \rightarrow \text{const}$  и  $X \rightarrow \text{const}$  при  $R \rightarrow \infty$ . На верхней ветви в пределе  $dR = 1,5 \cdot 10^8$ ,  $X = 0,088$ , на нижней  $\alpha R = 0,8 \cdot 10^6$ ,  $X = 0,14$ . Вдоль ветвей кривой 1 при  $R \rightarrow \infty$ , как и для течения Пуазейля,  $X \rightarrow 0$ ,  $\alpha R \rightarrow \infty$ .

При больших числах  $Na$  нейтральные кривые для симметричных и антисимметричных мод сливаются. Это связано с ростом  $\alpha$  и свойствами локальности. Слияние происходит в области носиков нейтральных кривых, но с увеличением  $R$ , поскольку  $\alpha \rightarrow 0$ , ветви расслаиваются и имеют различные асимптоты.

Зависимость критических чисел Рейнольдса и волновых чисел от числа Гартмана для возмущений обоих ти-

При больших  $Na$  профиль скорости практически всюду постоянен, кроме узких пристенных зон. Поэтому приосевые декременты близки к значениям, соответствующим случаю  $U \equiv \text{const}$ , т. е. имеют порядок  $1/R$  при  $\alpha \sim 1$ .

Пристенные возмущения имеют значительно

пов показана на рис. 40. Сплошная линия 1 соответствует расчетным данным для симметричных возмущений. Точками нанесены результаты Локка [443]. Штриховыми линиями 2 показаны асимптотические зависимости  $R_* = 48300 \text{ Ha}$  и  $\alpha_* = 0,16 \text{ Ha}$ . Кривые 3 отражают расчетные данные для антисимметричных возмущений. Неустойчивость обнаруживается при  $\text{Ha} > 6,5$ . Минимальное критическое число Рейнольдса достигается при  $\text{Ha} = 9,1$ . С ростом  $\text{Ha}$ ,  $R_*$  возрастает, выходя на асимптоту 2 при  $\text{Ha} > 15$ .

Антисимметричное МГД-течение Куэтта интересно тем, что оно имеет точку перегиба при  $y=0$ . Якобы соответствующая этому факту невязкая неустойчивость была обнаружена Павловым [170], но это связано с погрешностями асимптотического разложения, так как нетрудно убедиться, что течение Куэтта не обладает невязкой неустойчивостью. Ввиду того, что для течения Куэтта  $U'' = \text{Ha}^2 U$ , уравнение Релея (1.11) принимает вид

$$U[v'' - (\alpha^2 + \text{Ha}^2)v] = C(v'' - \alpha^2 v).$$

Поскольку в точке перегиба  $U=0$ , то для возмущения, имеющего критический слой в точке перегиба,  $C=0$ . Но в этом случае, каково бы ни было  $\alpha$ , нетривиального решения не существует, так что значение  $C=0$  не является собственным.

В силу свойств локальности при больших  $\text{Ha}$  те-

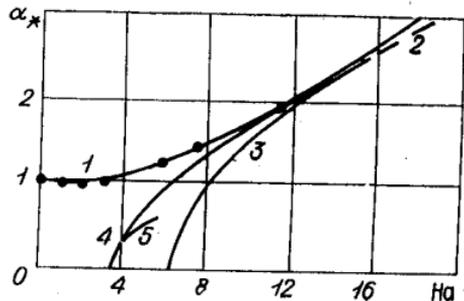
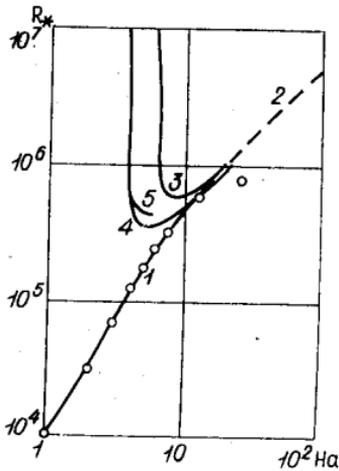


Рис. 40.

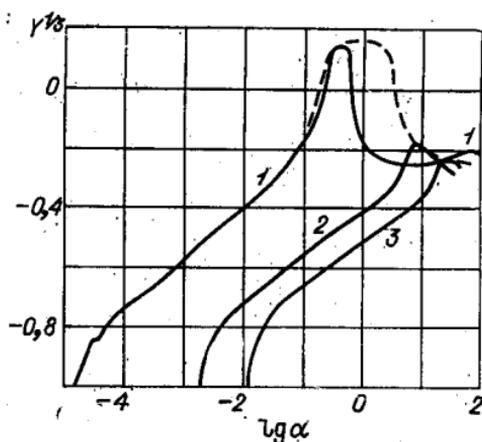


Рис. 41.

та зависимость  $Y(\alpha)$  обнаруживает локальный максимум при  $\alpha \sim 1$ , который, однако, для данного значения  $Na$  не приводит к неустойчивости при любых числах Рейнольдса. Но с ростом  $Na$  этот максимум попадает в область неустойчивости. На рис. 41 показана трансформация зависимости  $Y(\alpha)$  при  $R=10^6$  с изменением числа  $Na$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям  $Na=5; 45; 100$ . Пунктирная линия отмечает положение максимумов  $Y(Na)$ . Она пересекает ось  $Y=0$  при  $Na=4$ ,

затем инкремент достигает максимального значения при  $Na=8$ , а при  $Na > 20$  поток вновь становится устойчивым. Этот пример интересен тем, что указывает на возможную дестабилизацию течения под влиянием магнитного поля в определенном диапазоне чисел  $Na$ .

Зависимости  $R_*(Na)$  и  $\alpha_*(Na)$  нанесены на рис. 40 кривыми 4. Линии 5 соответствуют данным Какутани [406]. При  $Na < 3,9$  МГД-течение устойчиво к малым возмущениям при всех числах Рейнольдса, несмотря на наличие точки перегиба. С увеличением  $Na$  поле оказывает дестабилизирующее действие и  $R_*$  убывает, достигая минимальной величины  $3,3 \cdot 10^5$  при  $Na=5,5$ . Далее, течение стабилизируется и при  $Na > 15$  критическое число Рейнольдса выходит на асимптоту Локка. Дестабилизирующее влияние магнитного поля проявляется че-

чение Куэтта должно иметь неустойчивость такого же характера, что и течение Гартмана. При малых  $Na$ , как показывают расчеты, МГД-течение Куэтта обладает теми же свойствами, что и течение непроводящей жидкости. При  $Na=3$ ,  $R=10^5$  и  $\alpha < 3 \cdot 10^{-4}$  возмущения монотонны ( $X=0$ ). В отличие от обычного течения Куэтта

рез деформацию профиля скорости. Видимо, существует наиболее неблагоприятное в смысле устойчивости соотношение между кривизной профиля и его производной. Но вообще вопрос о том, от какого критерия зависит устойчивость того или иного профиля, остается открытым.

Устойчивость асимметричного МГД-течения Куэтта (6) и Куэтта — Пуазейля была исследована Сагалаковым [188—190].

Остановимся на исследовании наклонного магнитного поля. Этот случай представляет двойкий интерес. Во-первых, в реальных течениях в силу концевых эффектов поле всегда наклонно, что может привести к некоторой дестабилизации течения из-за наличия в (12) перекрестного члена с  $H_x \cdot H_y$ , о чем сказано ниже. Во-вторых, для наклонного поля несправедлива теорема Сквайра и необходимо вести исследование с учетом трехмерных возмущений.

Однако общий случай трехмерных возмущений для двумерного поля  $\{H_x, H_y\}$  сводится к эффективному двумерному, если ввести число Рейнольдса  $\hat{R} = \alpha R/k$  и эффективную продольную компоненту магнитного поля  $\hat{H}_x = \alpha H_x/k$ . При этом уравнение (12) сохранит силу, если заменить  $R$  на  $\hat{R}$  и  $H_x$  на  $\hat{H}_x$ .

Зависимости  $R$ . ( $Ha$ ) для различных углов наклона магнитного поля  $\gamma$  ( $\text{tg } \gamma = H_x/H_y$ ) показаны на рис. 42. При  $\gamma = 0$  получается течение в продольном поле. Оно было рассмотрено в работах [33, 384, 541]. Трехмерность возмущений удобно характеризовать углом  $\theta$  ( $\text{tg } \theta = \beta/\alpha$ ). Кривая 1 находится в хорошем согласии с данными Стюарта [541], нанесенными круглыми точками, и данными работы [33], показанными крестами. Случай  $\theta = 0$  отвечает двумерным возмущениям.

Хант [384] заметил, что если зависимость  $R$  ( $Ha$ ) для двумерных возмущений допускает касательную, проходящую через начало координат и лежащую ниже кривой, то при числах  $Ha$ , лежащих правее точки касания, наиболее опасны трехмерные возмущения. Действительно, если нейтральным, в частности критическим, является двумерное возмущение с параметрами  $\alpha$ ,  $R$ . и  $Ha$ ,

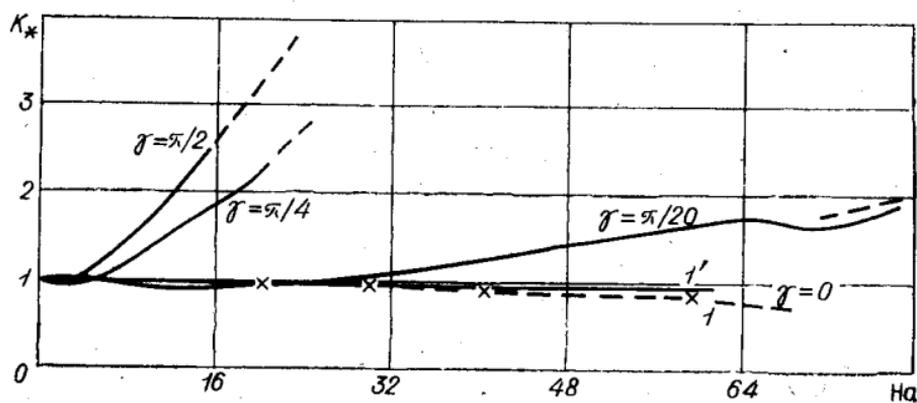
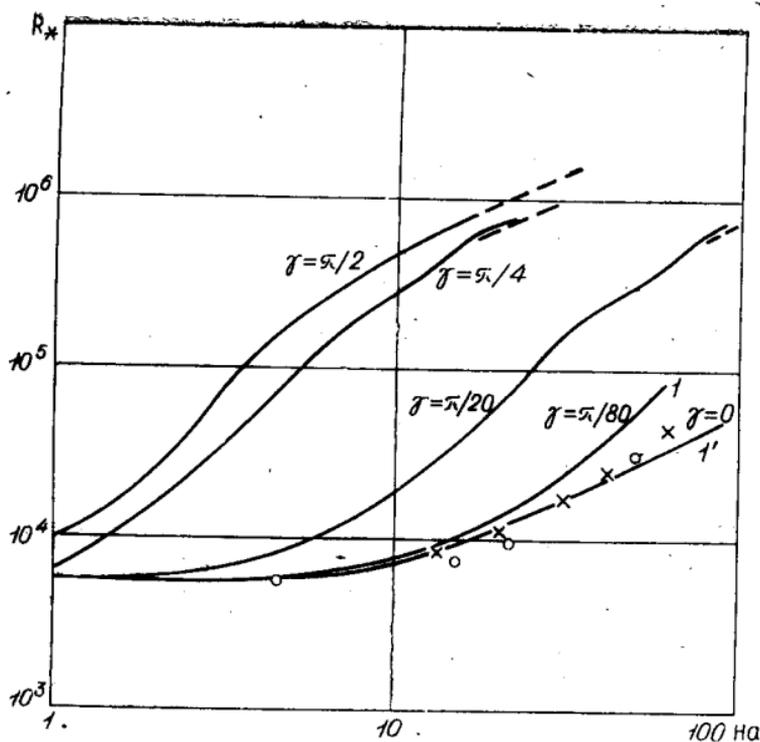


Рис. 42.

то нейтральными будут и трехмерные колебания с параметрами  $k = \alpha_*$ ;  $R = \alpha_* R_*/\alpha$ ;  $Na = \alpha_* Na_*/\alpha$ . Следовательно,  $R$  и  $Na$  будут лежать на луче, проходящем из начала координат через точку  $(R_*, Na_*)$ , причем имеют смысл только значения  $R > R_*$  и  $Na > Na_*$ . На рис. 42 упомя-

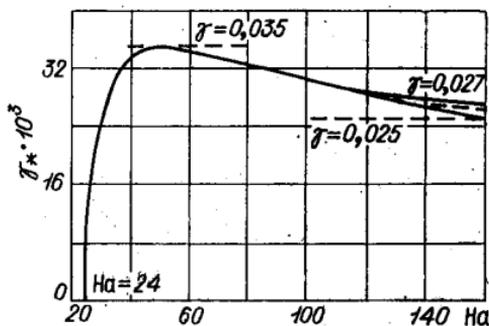


Рис. 43.

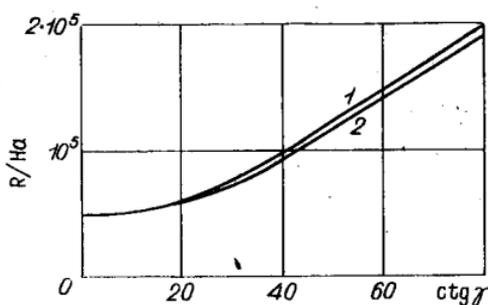


Рис. 45.

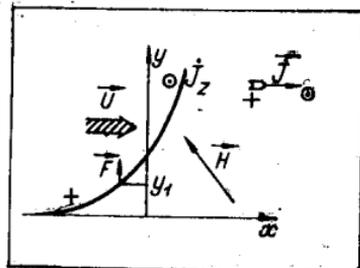


Рис. 44.

нутая касательная показана линией  $l'$ , которая следует зависимости  $R_* = 525 Ha$ . Касание имеет место в точке  $Ha = 24$ . Вдоль  $l'$  критическое волновое число остается постоянным:  $k_* = 0,9$ , так что  $\alpha = k_* Ha_* / Ha \rightarrow 0$  при  $Ha \rightarrow \infty$ . Зависимость  $R_*(\theta)$  при фиксированном значении  $Ha = 50$  и  $\gamma = 0$  имеет минимум  $R_* = 2,75 \times 10^4$ , когда  $\theta = 1,07$ . Однако при наложении дополнительно к продольному еще и поперечного поля вид кривых меняется так, что наиболее опасными становятся двумерные возмущения. Угол наклона поля, для которого трехмерные возмущения уже не играют определяющей роли, весьма невелик. Его величина зависит от числа  $Ha$  (рис. 43). Интересно отметить, что при больших значениях  $Ha$  имеется расслоение кривых в зависимости от того, направлена ли продольная компонента поля вдоль или против течения. Поле, направленное по потоку, стабилизирует его сильнее. Физическое объяснение этого явления следует из рис. 44. Сплошной линией нанесена зависимость наведенного поперечным полем стационарного тока, который течет в направлении оси  $z$  и определяется выражением  $j_z = R_m H_y (U - U_{cp})$ , где  $U_{cp}$  — среднее по сечению значение скорости. Около стенки ток отрица-

твенно. Около стенки ток отрица-

телен, и возникающая лоренцева сила  $F_y = A^2 H_x j_z$  при отрицательных  $H_x$  направлена от стенки в ядро течения, что вызывает дестабилизирующее действие наподобие архимедовых сил при подогреве слоя жидкости снизу. Но этот эффект весьма слаб. Зависимость величины  $R/Na$  при асимптотически больших числах Гартмана от угла наклона  $\gamma$  показана на рис. 45. Кривая 1 отвечает спутному полю, кривая 2 — встречному. Более сильная дестабилизация магнитоконвективного типа обнаруживается при больших значениях магнитного числа Рейнольдса. Этот случай исследован Сагалаковым [192].

Для углов  $\gamma > 0,035$  определяющую роль в стабилизации потока играет поперечная составляющая поля  $H_y$ . Зависимости  $R_*/Na$  от  $H_y$  для различных значений  $\gamma$  весьма слабо отличаются друг от друга и выходят на общую асимптоту

$$R_* = 48\,300 Na \sin \gamma \text{ при } Na \rightarrow \infty.$$

Таким образом, роль трехмерных возмущений обнаруживается только при весьма малых углах наклона магнитного поля к потоку. Заметим, что наложение трансверсального поля  $H_z$  может снизить роль трехмерных возмущений. Такое поле не взаимодействует с основным течением и с двумерными возмущениями. Оно входит лишь в уравнение для косых волн в качестве дополнительного диссипативного члена. Следует, однако, иметь в виду, что хотя на критические параметры, определяющие потерю устойчивости ламинарного режима, трехмерные возмущения в параллельных потоках влияют слабо, при больших числах Рейнольдса именно они в основном формируют диапазон генерации турбулентности, как об этом говорилось. Наличие неустойчивых трехмерных возмущений делает возможным трехгармоническое резонансное взаимодействие, которое приводит к быстрому росту пульсационной энергии. Для чисто двумерных возмущений таких резонансных триад не существует.

В некоторых работах [102, 104, 105, 231] изучались течения проводящей жидкости в трансверсальном магнитном поле. Было обнаружено, что в этом случае турбулентный режим имеет ряд особенностей. В частности, изменяется спектр, уменьшается перенос импульса, так

что профиль скорости и коэффициент трения оказываются близкими к случаю ламинарного потока. Вместе с тем уровень турбулентной энергии повышается.

Эти явления можно прокомментировать с точки зрения результатов, полученных в настоящей работе. Трансверсальное поле подавляет трехмерные возмущения, поэтому нейтральные поверхности на рис. 16, 17 асимптотически сплющиваются, а область генерации стягивается к началу координат и сокращается. В этом случае, как будет показано далее, возбуждение резонансных триад затруднено, что препятствует развитию каскадного процесса и хаотизации течения, но допускает возможность крупномасштабных автоколебаний. Предельный случай такой ситуации, когда каскадный процесс полностью «выключен», будет рассмотрен в главе IV. Свойства возбуждающихся автоколебаний напоминают картину, которую наблюдали рижские исследователи. Колебания имеют большую амплитуду, но слабо «зацеплены», так что напряжения Рейнольдса сравнительно малы.

### § 8. О ПРОСТРАНСТВЕННОМ РОСТЕ ВОЗМУЩЕНИЙ

До сих пор в настоящей работе рассматривалось развитие малых возмущений во времени, точнее, изучалась эволюция синусоидального сигнала, наложенного на течение в начальный момент времени. В то же время при экспериментальном исследовании устойчивости течения в некотором сечении задаются периодические по времени возмущения и изучается их пространственная эволюция вниз по потоку. Впервые пространственный рост возмущений экспериментально исследовался Шубауэром и Скремстедом [519] для пограничного слоя на плоской пластине. Их измерения явились решающим аргументом в пользу линейной теории и впоследствии были повторены и расширены рядом исследователей. Опыты о развитии возмущения по длине плоского канала проводили Као и Парк [407]. Теоретический анализ пространственного развития возмущений был предпринят Гастером [342] и Ватсоном [565], однако исследо-

валась лишь окрестность нейтральной кривой, в точках которой оба подхода дают тождественные результаты.

При анализе пространственного развития возмущений решение уравнений для малых возмущений ищется в виде  $v(y) \exp[i(\omega t - \alpha x)]$ , где  $\omega$  — заданная вещественная частота колебаний;  $\alpha$  — комплексное волновое число, его вещественная часть  $\alpha_r$  характеризует пространственную длину волны  $\lambda = 2\pi/\alpha_r$ , а мнимая  $\alpha_i$  — декремент пространственного изменения амплитуды. При  $\alpha_i > 0$  имеет место нарастание сигнала в положительном направлении оси  $x$ . Эта задача после преобразования Фурье сводится к уравнению Орра — Зоммерфельда

$$v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v = iR[(\omega - \alpha U)(v'' - \alpha^2 v) - \alpha U''v] \quad (1)$$

с однородными условиями  $v = v' = 0$  при  $y = \pm 1$ . Но в отличие от уравнения (I.1.1) в (1)  $\alpha$  — неизвестное собственное значение, которое входит сюда нелинейным образом, что вызывает некоторые специфические трудности.

Рассмотрим сначала спектр пространственных возмущений в простейшем случае покоящейся жидкости при  $U \equiv 0$ . После несложных выкладок получается трансцендентное уравнение для собственных значений  $\alpha$

$$\kappa \operatorname{th} \kappa = \alpha \operatorname{th} \alpha; \quad \kappa \operatorname{cth} \kappa = \alpha \operatorname{cth} \alpha; \quad \kappa^2 = \alpha^2 + iR\omega. \quad (2)$$

Если положить  $\omega = 0$ , т. е. рассмотреть случай, когда в начальном сечении задано некоторое стационарное возмущение профиля скорости, то характеристическое уравнение примет вид

$$2\alpha \pm \operatorname{sh} 2\alpha = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет комплексные корни, из которых первые 24 приведены в табл. 4. Они вычислены с помощью ЭВМ. Приблизительно эти корни могут быть найдены аналитически. Разделяя в (3) вещественную и мнимую части, получим

$$\cos q = \mp s / \operatorname{sh} s; \quad \operatorname{ch} s = \pm q / \sin q; \quad s = 2\alpha_r; \quad q = 2\alpha_i.$$

С ростом  $s$  величина  $s / \operatorname{sh} s$  быстро убывает, поэтому при больших  $s$  приближенно имеем  $q = \pi k + \pi/2$ ;  $s = \ln 2q$ ;  $k = 1, 2, \dots$ , или

$$\alpha_k = 1/2 \ln \pi(2k+1) + i(2k+1)\pi/4; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Таблица 4

Корни уравнения  $2\alpha = (-1)^n \text{sh}(2\alpha)$ 

$n$	$\alpha_r$	$\alpha_i$	$n$	$\alpha_r$	$\alpha_i$
1	1,1253643	2,1061961	2	1,3843391	3,7488381
3	1,5515744	5,3562687	4	1,6761049	6,9499798
5	1,7755437	8,5366824	6	1,8583838	10,1192588
7	1,9294045	11,6991776	8	1,9915708	13,2772736
9	2,0468525	14,8540599	10	2,0966257	16,4298705
11	2,1418908	18,0049530	12	2,1833976	19,5794082
13	2,2217229	21,1534133	14	2,2573202	22,7270357
15	2,2905523	24,3003420	16	2,3217140	25,8733841
17	2,3510482	27,4462029	18	2,3787576	29,0188310
19	2,4050126	30,5912950	20	2,4299583	32,1636168
21	2,4537192	33,7358143	22	2,4764027	35,3079025
23	2,4981022	36,8798941	24	2,5188996	38,4518000

Сопоставление с табл. 4 показывает, что формула (4) дает удовлетворительные результаты уже при небольших  $k$ . Из уравнения (3) следует, что если  $\alpha_1$  — корень, то корнями будут  $-\alpha_1, \pm \alpha_1^*$ . Следовательно, спектральная картина на плоскости  $\alpha$  симметрична относительно координатных осей. Ясно, что в случае покоящейся жидкости физический смысл имеют только затухающие возмущения. Поэтому для полуполосы  $x \geq 0$ ;  $-1 \leq y \leq 1$  должны быть отобраны только корни, имеющие  $\alpha_i < 0$ . Аналогичная ситуация имеет место и при ненулевой частоте  $\omega$ . Из уравнения (2) следует, что при любом  $\omega$  наряду с корнем  $\alpha$  существует и корень  $-\alpha$ . При замене  $\omega$  на  $-\omega$  корень  $\alpha$  переходит в  $\alpha^*$ . При больших частотах кривые  $\alpha(\omega)$  параллельны асимптотической зависимости  $\alpha = \pm \sqrt{(\pm i\omega R)}$ . Для полуполосы  $x > 0$  физический смысл имеют только собственные значения с  $\alpha_i < 0$ . Им отвечают волны, бегущие в положительном направлении оси  $x$ .

Такой отбор по физическому смыслу затруднен при  $\nabla U \neq 0$ , когда задача как раз и состоит в отыскании ре-

жимов с  $\alpha_i > 0$ . Казалось бы, для бегущих волн естественно рассматривать только те, которые распространяются вниз по потоку. Этот критерий, однако, ненадежен, ибо, как мы видели, в струйных течениях возмущения могут распространяться и вверх по потоку. Такими же свойствами будут обладать вблизи нейтральной кривой и пространственно развивающиеся возмущения. Поэтому вопрос о выборе физически допустимых спектральных значений требует дальнейшего анализа. Поскольку при рассмотрении временного роста подобные трудности не возникают, можно попытаться для выбора и оценки пространственных декрементов использовать результаты вычисления временных декрементов.

Пусть имеются возмущения, развивающиеся во времени по закону  $\exp[i\alpha(x - Ct)]$ . Если перейти в систему координат, движущихся со скоростью  $X = C$ , т. е. сделать преобразование  $x_1 = x - Xt$ , то закон движения возмущения запишется в виде

$$\exp[\alpha(x - x_1)U/X + i\alpha x_1],$$

откуда вытекает выражение для пространственного декремента  $\gamma = \alpha U/X$ . Если же с самого начала рассматри-

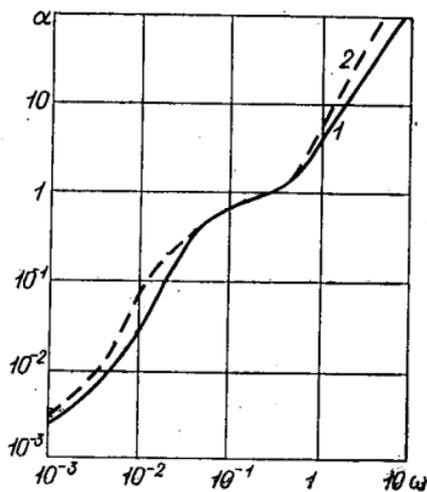
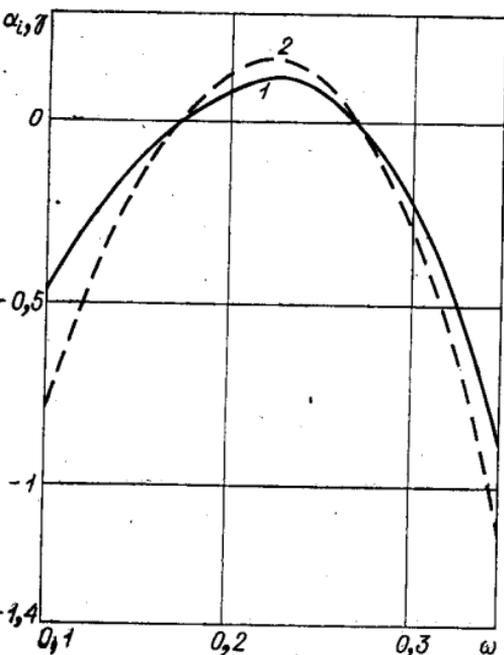


Рис. 46.

вать возмущения, развивающиеся в пространстве, то декремент определяется величиной  $\alpha_i$ . В работе [234] были проведены расчеты для течения Пуазейля в канале и сопоставлены величины  $\alpha_i$  и  $\gamma$ . Их зависимость от частоты  $\omega$  ( $\omega = \alpha X$  во временном случае) показана кривыми 1 и 2 на рис. 46 при  $R = 10^4$ .

Фазовые скорости волн  $X$  и  $\omega/\alpha_r$  в диапазоне неустойчивости совпадают с точностью графического изображения. Декременты ведут себя качественно сходным образом, но величина  $\gamma$  в области неустойчивости превосходит  $\alpha_i$ .

## Глава III

### ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Данная глава посвящена энергетическим оценкам устойчивости по отношению к произвольным возмущениям, т. е. анализ проводится в рамках второго метода Ляпунова, причем в качестве знакопостоянной функции выбрана кинетическая энергия. Уравнение энергии пульсационного движения использовалось для оценок снизу критического числа Рейнольдса еще самим О. Рейнольдсом [503], а затем Лоренцем [445], Орром [473], Карманом [409]. Наиболее строго изложил этот подход Серрин [524], который показал, что если число Рейнольдса  $R$  не превосходит некоторого значения  $R_0$ , то энергия произвольного начального возмущения будет со временем монотонно убывать, а при  $R > R_0$  найдется возмущение, энергия которого немонотонна во времени.

Диапазон  $R_0 < R < R_*$  включает все экспериментальные данные по критическим числам Рейнольдса. К сожалению, часто  $R_0 \ll R_*$ , однако бывают случаи, когда  $R_0$  и  $R_*$  близки.

В настоящей главе наряду с классической задачей Орра рассмотрены ее обобщения для случая МГД-течений, а также развиты методы оценок пульсационной энергии и некоторых других факторов для установившегося турбулентного потока.

#### § 1. ЗАДАЧА ОРРА

Линейная теория, в рамках которой проводился анализ в предыдущей главе, определяет лишь достаточные условия неустойчивости течения. При этом есть примеры, когда линейная теория предсказывает абсо-

лутную устойчивость течения по отношению к малым возмущениям, тогда как на практике при достаточно больших числах Рейнольдса всегда наблюдается переход к турбулентному режиму, что связано с неустойчивостью потока по отношению к конечным возмущениям.

Если возмущения не считать малыми, то анализ устойчивости усложняется, поскольку определяющие уравнения становятся нелинейными и трудности исследования сравнимыми с теми, которые возникают при изучении развитой турбулентности.

Однако существует раздел нелинейной теории устойчивости, где задача сводится к анализу линейных уравнений. Это касается энергетических оценок критического числа Рейнольдса в условиях, когда поток возмущается произвольным сколь угодно большим сигналом.

В основу анализа положено уравнение энергии возмущений (II.1.3), которое для удобства приведем здесь еще раз:

$$\frac{dE}{dt} = 1/2 \int_{\Omega} v_k^2 d\Omega = - \int_{\Omega} v_k v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} d\Omega - \frac{1}{R} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega. \quad (1)$$

Предполагается, что на границе области  $\Omega$  пульсации скорости обращаются в нуль. Если область течения бесконечна, как в плоском канале, то интегрирование по  $\Omega$  понимается в смысле усреднения по однородным координатам и от возмущений  $v_k$  требуется, чтобы они такое усреднение допускали. Это довольно слабое ограничение, выполняемое для периодических, почти периодических, а также вообще нерастающих функций.

Непосредственно из уравнения (1) ясно, что при достаточно малых  $R$  в силу знакоопределенности диссипативного члена энергия произвольного возмущения будет монотонно убывать со временем.

Определение максимального числа Рейнольдса, при котором это еще будет происходить, составляет задачу Орра, впервые рассчитавшего энергетическую границу устойчивости [473]. При получении численных результатов в данной монографии, а также в работах [445, 409] анализ ограничивался двумерными возмущениями. Подобное сужение класса допустимых возмущений лишает

энергетические оценки доказательной силы. Как справедливо отмечал Тейлор [551], критикуя такой подход, возмущение  $v_k$ , имеющее в начальный момент  $dE/dt > 0$ , в дальнейшем может затухать, и, наоборот, наличие в начальный момент неравенства  $dE/dt < 0$  не исключает в последующем возможности выхода возмущения из рассматриваемого класса и его рост.

Для содержательности энергетической оценки  $R_0$  класс допустимых возмущений должен быть достаточно широким, чтобы охватывать все возможные формы, которые могут принимать реальные возмущения при своем развитии.

Класс всевозможных соленоидальных векторных полей, рассмотренный Серрином, который дал строгую постановку задачи Орра, подходит в этом смысле. Каждое пробное поле скорости  $v_k(x, y, z)$  из этого класса можно рассматривать как начальное. Если  $f(R) = \max_{v_k} (dE/dt) < 0$ , то энергия произвольного возмущения будет убывать в каждый момент времени, поскольку любой момент времени можно рассматривать как начальный, а энергия убывает даже для самого «плохого» поля  $v_k$ .

Таким образом, задача определения  $R_0$  сводится к максимизации функционала (1) на всевозможных соленоидальных пробных полях  $v_k$ , удовлетворяющих граничным условиям, и отысканию первого нуля функции  $f(R)$ , которая при малых  $R$  заведомо отрицательна.

Вслед за работой Серрина появились исследования где были получены энергетические оценки для конкретных течений. Вельте [560] получил общую оценку для течений между параллельными стенками:  $R_0 \geq 3(U_{cp}/U_{max})$ , где  $U_{cp}$  и  $U_{max}$  — средняя и максимальная скорости основного потока. Джозеф [403] и Карми [275] рассчитали точные значения  $R_0$  для ряда течений в каналах. Энергетические критические параметры были оценены для течений в круглой трубе, кольцевом зазоре и между вращающимися цилиндрами в работах [274, 403, 404]. Энергетический анализ МГД-течений предпринят в работах [197, 277, 280, 351, 462]. В статье [196] рассмотрены случаи плоского течения Куэтта — Пуазейля, струйных

течений и конвективного течения между вертикальными пластинами. В последние годы появились работы по энергетическим оценкам устойчивости течений в пограничном слое и струе [278, 325, 326, 396], развитию энергетического метода посвящены статьи [279, 311, 492].

Для минимизации функционала (1) в классе соленоидальных полей нужно найти абсолютный минимум функционала

$$\Phi = \int_{\Omega} \left[ \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - v_k v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)^2 \right] d\Omega,$$

где  $\rho$  — функциональный множитель Лагранжа, введение которого обеспечивает выполнение уравнения неразрывности  $\partial v_k / \partial x_k = 0$ .

После вариации функционала  $\Phi$  и интегрирования по частям с учетом условий прилипания для  $v_k$  находим

$$\delta\Phi = \int_{\Omega} \left[ \frac{2}{R} \Delta v_k - \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) v_j - \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right] \delta v_k d\Omega.$$

Требую, чтобы  $\delta\Phi = 0$  при произвольных  $\delta v_k$ , получаем уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{2}{R} \Delta v_k = \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) v_j + \frac{\partial \rho}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$

В силу однородности системы (2) и краевых условий всегда существует тривиальное решение  $v_k \equiv 0$ . Задача состоит в определении таких значений параметра  $R$ , при которых система (2) имеет нетривиальные решения. Тем самым задача Орра сводится к спектральной проблеме на собственные значения параметра  $R$ .

Нетрудно убедиться, что нетривиальные решения (2) удовлетворяют условию  $dE/dt = 0$ . Для этого достаточно (2) умножить на  $v_k$  и проинтегрировать по  $\Omega$ .

Уравнения (2) схожи по структуре с уравнениями гидродинамики для стационарных малых возмущений, причем величина  $\rho$  является аналогом давления.

Для течений в плоском канале система (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{2}{R} \Delta v_x &= U' v_y + \frac{\partial p}{\partial x}; & \frac{2}{R} \Delta v_y &= U' v_x + \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{2}{R} \Delta v_z &= \frac{\partial p}{\partial z}; & \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

После Фурье-преобразования по координатам  $x$  и  $z$  получаем уравнения для Фурье-образов  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $2q/R$  компонент скорости и давления:

$$\begin{aligned} u'' - k^2 u &= 1/2 R U' v + i \alpha q; & v'' - k^2 v &= 1/2 R U' u + q'; \\ w'' - k^2 w &= i \beta q; & i \beta q; & i \alpha u + i \beta w + v' = 0; \\ u = v = w = 0 & \text{ при } y = \pm 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь, как и раньше,  $\alpha$ ,  $\beta$  — компоненты волнового вектора;  $k$  — его модуль.

Исключая в системе (3) давление  $p$  и компоненту  $w$ , нетрудно получить уравнения для  $u$  и  $v$

$$\begin{aligned} v^{IV} - 2k^2 v'' + k^4 v + 1/2 i \alpha R (U' v)' &= -1/2 k^2 R U' u; \\ u'' - k^2 u &= \beta^2 / (2k^2) \cdot R U' v + i \alpha / k^2 \cdot (v''' - k^2 v'); \\ u = v = v' = 0 & \text{ при } y = \pm 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Разделив первое уравнение на  $U'$  и подействовав оператором Лапласа, получим уравнение

$$\begin{aligned} (d^2/dy^2 - k^2) [1/U' (d^2/dy^2 - k^2)^2 v + i k R \cos \theta (v' + \\ + U''/(2U') \cdot v)] + k^2 R^2 \sin^2 \theta U' v/4 = 0; \\ v = v' = v^{IV} - 2k^2 v'' = 0 & \text{ при } y = \pm 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введен угол  $\theta$  между вектором скорости основного потока и волновым вектором  $\vec{k}$ , так что

$$\alpha = k \cos \theta; \quad \beta = k \sin \theta.$$

Отметим некоторые свойства полученной спектральной задачи.

1. Существуют только вещественные собственные значения  $R$ . Хотя система (3) и уравнение (5) имеют комплексные коэффициенты, вещественность  $R$  легко установить, умножая уравнения (3) соответственно на  $u^*$ ,

$v^*$ ,  $w^*$  (где звездочкой отмечено комплексное сопряжение), суммируя и интегрируя по интервалу. Тогда с учетом граничных условий и уравнения неразрывности получаем соотношение

$$\frac{1}{2} R \int_{-1}^1 (u^*v + uv^*) U' dy + \int_{-1}^1 (|u'|^2 + |v'|^2 + |w'|^2 + k^2 (|u|^2 + |v|^2 + |w|^2)) dy = 0,$$

откуда и следует вещественность  $R$ .

2. Если существует собственное значение  $R$  и собственная функция  $v$ , то собственным является и значение  $-R$  с собственной функцией  $v^*$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно провести комплексное сопряжение уравнения (5). Отрицательным  $R$  соответствует течение в направлении, противоположном оси  $x$ . Следовательно, при расчете величины  $R_0$  следует искать минимальное по модулю собственное значение  $R$ .

3. Спектр собственных значений  $R(\alpha, \beta)$  симметричен относительно осей  $\alpha=0$  и  $\beta=0$ . Это следует из уравнения (5), поскольку, во-первых, замена  $\theta$  на  $-\theta$  оставляет уравнение инвариантным, и, во-вторых, изменение  $\theta$  на  $\pi$  приводит к той же спектральной задаче для сопряженных величин. Таким образом, достаточно изучить спектр в первом квадранте  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

4. При  $k \ll 1$  собственные значения  $R \sim 1/k$ . Это следует из того, что при  $k \rightarrow 0$  существует конечное собственное значение  $R_1 = k R$ , так как при  $k \rightarrow 0$  уравнение (5) сводится к виду

$$\left[ \frac{1}{U'} v^{IV} + i R_1 \cos \theta \left( v' + \frac{U''}{(2U')} v \right) \right] + \frac{1}{4} R_1^2 \sin^2 \theta U' v = 0.$$

Для течения Куэтта, когда  $U' = \text{const}$ , можно непосредственно выписать характеристическое уравнение, которое имеет сложный трансцендентный вид и при каждом  $\theta$  счетный набор корней.

5. В противоположном предельном случае  $k \gg 1$  после преобразования  $R = k R_2$ ;  $\eta = ky$  уравнение (5) прини-

мает вид

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - 1\right) \left[ \frac{1}{U'} \left(\frac{d^2}{d\eta^2} - 1\right)^2 v + i R_2 \cos \theta \left(v' + \frac{U''}{2U'} v\right) \right] + \\ + \frac{1}{4} R_2^2 \sin^2 \theta U' v = 0;$$

$$v = v' = v''' - 2v'' = 0 \text{ при } \eta = \pm \infty.$$

Поскольку данная спектральная задача поставлена для бесконечной области, она может и не иметь дискретного спектра. В этом случае с ростом  $k$  собственное значение  $R$  будет возрастать быстрее, чем по линейному закону. Если же существуют конечные собственные значения  $R_2$ , то величина  $R$  асимптотически пропорциональна  $k$ .

Для конкретных численных расчетов уравнение (5) неудобно. Рационально ввести новую переменную  $\psi = i\alpha v' - k^2 u$ . Тогда задача сводится к системе уравнений

$$v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v + i\alpha R (U' v' + 1/2 U'' v) = 1/2 R U' \psi; \quad (6)$$

$$\psi'' = k^2 \psi - 1/2 \beta^2 R U' v; \quad v = v' = \psi = 0 \text{ при } y = \pm 1.$$

Рассмотрим результаты энергетического анализа на примере течения Куэтта—Пуазейля в плоском канале  $U = (1-A)(1-y^2) + Ay$ .

На рис. 47 изображены линии уровня первого спектрального значения  $R(k, \theta)$  для плоского течения Пуазейля ( $A=0$ ). Линии 1—7 отвечают значениям числа Рейнольдса  $R=50; 60; 80; 100; 200; 400; 800$  соответственно. Наименьшее значение числа Рейнольдса  $R=49,6$  достигается при  $\theta=\pi/2$  и  $k=2,04$ , что совпадает с результатами в статье [389]. Аналогичная картина имеет место и для течения Куэтта. Минимум  $R_0=29,6$  расположен при  $\theta=\pi/2; k=1,56$  и согласуется с данными работы [403].

Интересно, что собственное значение  $R$  достигает минимума при  $\theta=\pi/2$  во всех известных расчетах по энергетическим оценкам для самых разнообразных течений в канале. Однако нам неизвестно доказательство этой антитезы теоремы Сквайра. Структура наиболее «опасного» в энергетическом анализе возмущения представ-

ляет собой цепочку бесконечных циркулирующих вихрей с осями, параллельными оси  $x$ , и попарно противоположным вращением. Следует отметить, что подобные образования в качестве мгновенной картины наблюдаются в реальном турбулентном потоке вблизи стенки [415].

Как следует из расчетов, асимптотические зависимости  $R \sim 1/k$  выполняются с хорошей точностью уже при  $k < 0,5$ . При больших  $k$  для любого фиксированного  $\theta$  и данного  $A$  величина  $R \sim k$ . Интересной особенностью течения Пуазейля является то, что  $R_{\min}$  при любом  $\theta$  отвечает одному и тому же значению  $k = 2,04$ . При  $\theta = 0$   $R_{\min} = 87,6$  для течения Пуазейля и  $R_{\min} = 44,3$ ;  $k = 2$  для течения Куэтта, что было получено еще Орром [473].

Были рассчитаны зависимости  $k_s$  и  $R_s$  от формпараметра  $A$ . Для всех  $A$  минимум  $R$  достигается при  $\theta = \pi/2$ . С увеличением  $A$  как  $R_s$ , так и  $k_s$  несколько уменьшаются. Это резко не соответствует результатам линейного анализа, но не противоречит экспериментальным данным.

Опытных данных о критических числах Рейнольдса при течениях в плоском канале сравнительно немного, так как большинство исследований посвящено течениям в круглой трубе и пограничных слоях, что связано с простотой эксперимента.

Материалы о переходе в плоском течении Куэтта, полученные Рейхардтом [499] и Кольманом [419], свидетельствуют, что при  $R = 600$  наблюдался ламинарный режим. Критическое число Рейнольдса было равно 750. Поскольку метод реализации течения Куэтта с помощью гибких ремней не позволил избежать внешних возмуще-

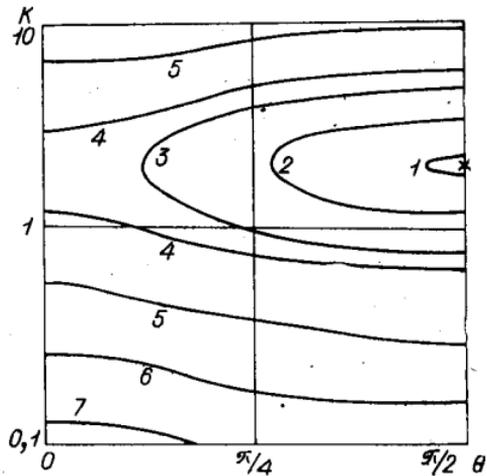


Рис. 47.

ний, то это значение можно рассматривать как минимальное критическое число Рейнольдса.

Переход в плоском канале изучался авторами работ [267, 312, 410, 461, 477, 525, 561]. В работе [410] описаны опыты, которые велись в прямоугольном канале с отношением сторон 1:70.

Максимальное число Рейнольдса, при котором наблюдался ламинарный режим и которое рассчитано по полуширине канала и средней скорости, составляло 3350. Интенсивность внешних возмущений была порядка 0,3%. Минимальное число Рейнольдса, при котором наблюдался турбулентный режим, составляло 900 при интенсивности возмущений 8%. В работе [312] эта величина была меньшей (примерно 700). Сопоставляя эти данные с энергетической оценкой  $R_s = 33,1$  (49,6/1,5), видим, что опыт в 20—30 раз превосходит эту оценку. Совпадение  $R_s$  и  $R_c$  достигалось бы в том случае, если бы стационарное поле скорости, минимизирующее функционал (1), являлось решением уравнений Навье — Стокса. Но этого заведомо не может быть. В самом деле, умножая уравнения возмущенного движения (II.1.2) для  $y$ - и  $z$ -компонент скорости на  $v_y$  и  $v_z$ , суммируя их и интегрируя по области течения, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v_y^2 + v_z^2) d\Omega = \int_{\Omega} p \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) d\Omega - \frac{1}{R} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial v_y}{\partial x_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial x_j} \right)^2 \right] d\Omega. \quad (7)$$

Здесь учтена плоскопараллельность основного течения, вследствие которой конвективные члены из (II.1.2) не дают вклада в (7).

Во всех известных нам случаях, как уже отмечалось, минимум собственного значения  $R$  достигается на возмущениях, не зависящих от продольной координаты  $x$ . Для возмущений такого рода уравнение неразрывности дает  $\partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z = 0$ . Следовательно, согласно (7)

$$1/2 \cdot d/dt \int_{\Omega} (v_y^2 + v_z^2) d\Omega < 0.$$

В силу полученного неравенства минимизирующее поле скоростей не может быть стационарным решением уравнений Навье — Стокса. Это показывает, что требование монотонного затухания энергии является слишком ограничительным.

Качественная диаграмма устойчивости для течения в каналах изображена на рис. 48. В области I при  $R < R_0$ , энергия любого возмущения монотонно затухает. В области II энергия любого возмущения затухает со временем, но не монотонно. В области III при  $R_m < R < R_*$ , где  $R_m$  — минимальное число Рейнольдса для перехода, определенное по опытным данным, возмущение затухает, если его энергия лежит ниже пограничной кривой 1. Если же начальная энергия выше критической, то развивается турбулентный режим с энергией пульсаций, соответствующей кривой 2. В области IV при числе Рейнольдса  $R > R_*$  реализуется только турбулентный режим течения. Область IV теоретически может не существовать, если  $R_* = \infty$ , как это свойственно течениям Куэтта и Гагена — Пуазейля. Вид пограничной кривой 1 для таких случаев обозначен пунктиром.

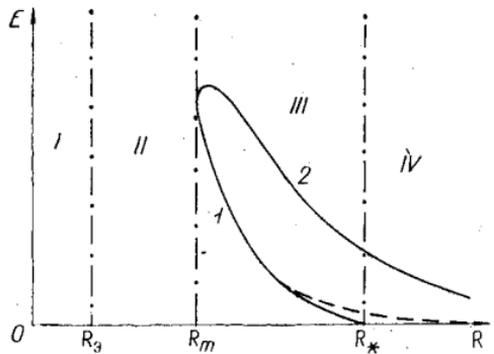


Рис. 48.

На основании изложенного, казалось бы, можно сделать вывод, что энергетические оценки слишком грубы и дают весьма заниженные критические значения  $R$  по сравнению с экспериментом. Однако существуют течения, для которых  $R_0$  оказывается близким не только опытным значениям, но и критическому числу Рейнольдса  $R_*$ , определенному по линейной теории. Это, прежде всего, случай, когда отмечается переход от одного стационарного ламинарного режима течения к другому. О такой ситуации говорят, что действует принцип смены устойчивости. Нейтральные колебания в этом случае стационарны и уравнения малых возмущений похожи на (2).

Сходство еще более усиливается, если коэффициенты уравнения усредняют по области течения, как это делается в узкощелевом приближении для течения между вращающимися цилиндрами. В таких условиях данные линейной теории и энергетические оценки практически совпадают [404].

Другой случай близости результатов линейной теории и энергетических оценок — течение с точкой перегиба в профиле скорости, когда проявляется невязкая неустойчивость.

## § 2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРОФИЛЕЙ СКОРОСТИ С ТОЧКАМИ ПЕРЕГИБА

Рассмотрим устойчивость струйного течения Бикли — Шлихтинга  $U=1-th^2$   $y$  между двумя параллельными плоскостями, расположенными на расстояниях  $\pm a$  от оси струи. Положим  $v=v'=u=0$  при  $y=\pm a$ . Минимальное значение  $R_0=3,7$  достигается при  $k_0=0,327$ ;  $\theta=\pi/2$ . При больших и малых  $k$  линии уровня располагаются эквидистантно, что согласуется с асимптотическими зависимостями.

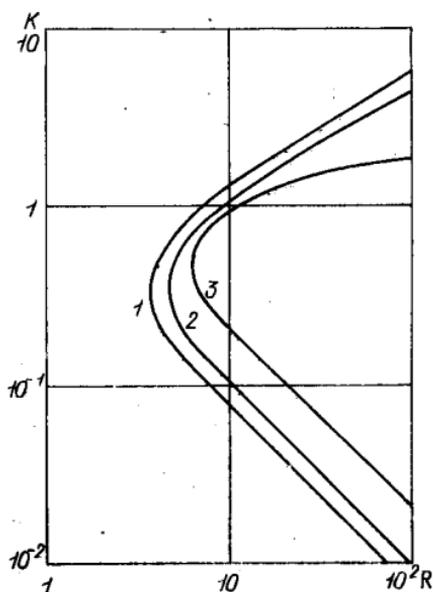


Рис. 49.

Более рельефно это согласие видно на рис. 49, где нанесены зависимости  $R(k)$  при  $\theta=\pi/2$  (кривая 1) и  $\theta=0$  (кривая 2). Для сопоставления приведена нейтральная кривая 3 по линейной теории устойчивости. Как видно, при  $k \ll 1$  различие результатов линейного и энергетического анализа невелико.

Для критических параметров имеем следующие данные:

энергетический метод —  
 $\theta=\pi/2$ ,  $R_0=3,7$ ,  $k_0=0,327$ ;

энергетический метод —  $\theta=0$ ,  $R_0=4,75$ ,  $k_0=0,345$ ;  
линейная теория —  $\theta=0$ ,  $R=6,25$ ,  $k_0=0,46$ .

Различие по критическому числу Рейнольдса менее чем в 2 раза. Вдоль нижней ветви всех кривых  $R \sim 1/k$ .  
Вдоль верхней ветви 1 и 2 число Рейнольдса асимптотически возрастает пропорционально  $k^2$ .

Минимальное по модулю собственное значение  $R$  отвечает возмущениям  $v(y)$ , симметричным относительно оси струи. Сравнение зависимостей  $R(k)$ , проведенное для симметричных и антисимметричных возмущений при  $a=6$  и  $\theta=\pi/2$ , показывает, что при больших  $k$  они имеют общую асимптоту. Минимум в антисимметричном случае лежит выше ( $R_{\min}=6,1$ ) и смещен в сторону больших  $k$  ( $k_{\min}=0,4$ ). Данные сравнения  $R_0$  с  $R$  при  $a=6$  в значительной мере обесценятся, если осуществить предельный переход к бесконечно широкой струе, сохраняя граничные условия прилипания. Расчеты показывают, что значение  $R_0$  зависит от отношения ширины канала к ширине струи, причем в отличие от линейной теории при  $a \rightarrow \infty$  минимальное значение  $R$  стремится к нулю. Критическое волновое число уменьшается с ростом  $a$ , так что  $ak_0$  остается примерно постоянным и равным 2,43. Зависимость  $R_0(a)$  имеет более сложный характер, и при  $a \geq 100$   $R_0 \sim a^{-0,55}$ .

Изменение  $R_0$  с ростом  $a$  свидетельствует о том, что роль граничных условий в этой задаче весьма существенна, в силу чего необходимо рассмотреть несколько иную постановку задачи о неограниченной струе. Следуя обычной методике исследования течений в безграничной области, остановимся на трехслойном течении

$$U(y) = \begin{cases} 1 - \text{th}^2 a, & y \leq -a; \\ 1 - \text{th}^2 y, & -a \leq y \leq a; \\ 1 - \text{th}^2 a, & y \geq a. \end{cases} \quad (1)$$

При достаточно больших значениях  $a$  величина  $1 - \text{th}^2 a$  очень мала, и вне интервала  $(-a, a)$  жидкость можно считать покоящейся.

Систему уравнений Эйлера — Лагранжа (1.2) будем считать справедливой и в неограниченной области; условия прилипания заменим требованием затухания возмущений на бесконечности. Эти условия для трехслойного течения (1) нетрудно перенести на плоскости  $y = \pm a$ . При  $|y| > a$   $U' = 0$ , поэтому уравнения (1.6) имеют вид

$$v^{1V} - 2k^2 v'' + k^4 v = 0; \quad \psi'' - k^2 \psi = 0. \quad (2)$$

Легко видеть, что при  $|y| > a$  найдется по три фундаментальных решения, затухающих на  $\pm\infty$ . Например, при  $y < -a$  затухающие решения имеют вид

$$v = C_1 e^{ky} + C_2 y e^{ky}; \quad \psi = C_3 e^{ky}.$$

Исключая произвольные константы, получаем условия затухания в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} v'' - 2kv' + k^2 v = 0; \quad \psi' - k\psi = 0; \quad y < -a; \\ v'' + 2kv' + k^2 v = 0; \quad \psi' + k\psi = 0; \quad y > a. \end{aligned} \quad (3)$$

Соотношения (3) используются как граничные условия при решении задачи на интервале  $(-a, a)$ .

Энергетическая задача для струи с указанными граничными условиями была рассчитана в широком диапазоне значений  $a$ . Зависимости  $R_0(a)$  и  $k_0(a)$  вполне аналогичны случаю твердых стенок при  $y = \pm a$ . Величина  $ak_0 = 1,24$ . При любых конечных  $a$  различие в результатах, соответствующих разным граничным условиям, остается. В случае безграничной среды  $R_0$  меньше значения для канала примерно в 1,5, а волновое число в 2 раза. Но в обоих случаях при  $a \rightarrow \infty$   $R_0$  и  $\alpha_0$  стремятся к нулю.

Этот результат остался незамеченным в работе Карми [278], как, впрочем, и аналогичные данные по линейной теории в работах других исследователей. В линейной теории  $\alpha_0 \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow \infty$ , но величина  $R_0$  остается конечной, тогда как энергетическая оценка дает принципиально иной результат: сказываются особенности, присущие неограниченным областям. Поэтому вернемся к ограниченному потоку и рассмотрим конвективное течение между двумя вертикальными плоскостями, имею-

щими различные температуры. Профиль скорости течения имеет точку перегиба и выражается формулой [47]

$$U = y - y^3. \quad (4)$$

Около теплой стенки жидкость поднимается, а около холодной опускается. Вообще говоря, устойчивость этого течения надо рассматривать, привлекая уравнение теплопроводности. Но если считать коэффициент теплопроводности достаточно большим, т. е. число Прандтля малым, то возмущения температурного поля можно не учитывать и анализировать чисто гидродинамическую задачу. Именно в такой постановке линейная задача гидродинамической устойчивости рассмотрена Бирихом [17], который получил критическое число Рейнольдса  $R_* = 83$  и волновое число  $\alpha_* = 1,3$ . Под числом Рейнольдса здесь подразумевается комплекс типа Грасгофа  $R = g\beta\Delta T h^3 / 12\nu^2$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\beta$  — коэффициент теплового расширения;  $\Delta T$  — перепад температур между пластинами;  $h$  — половина ширины зазора;  $\nu$  — кинематическая вязкость.

Энергетическая задача в общем случае уравнений тепловой конвекции рассмотрена Джозефом [399]. Случай чисто гидродинамических возмущений сводится к задаче Орра (1.2).

Линии уровня первого собственного значения  $R(k, \theta)$  для профиля (4) аналогичны изображенным на рис. 47. Расчеты дают  $R_* = 29$ ;  $k_* = 1,8$ . Минимальное значение  $R$  при  $\theta = 0$  достигается при  $k = 1,9$  и равно 58. Энергетическая оценка  $R_*$  меньше критического числа по линейной теории почти в 3 раза. Экспериментальные данные [561], полученные для числа Прандтля ( $Pr = 0,71$ ), дают  $R_* = 91$ ;  $k_* = 1,37$ , что близко к результатам линейной теории и свидетельствует о мягком характере возбуждения неустойчивости.

### § 3. АНАЛОГ ЗАДАЧИ ОРРА ДЛЯ МГД-ТЕЧЕНИИ

При линейном анализе устойчивости МГД-течений в главе II показано, что стабилизирующее воздействие магнитного поля проявляется главным образом через деформацию профиля скорости основного течения. Здесь

мы покажем, что форма профиля скорости играет решающую роль и при энергетических оценках.

Уравнение для полной (кинетической и магнитной) энергии возмущенного движения (II.7.9) позволяет априори утверждать, что при достаточно малых значениях обычного и магнитного чисел Рейнольдса  $R$  и  $R_m$  любое возмущение будет монотонно затухать.

Вариационную задачу, аналогичную задаче Орра, можно сформулировать для любого из критериев  $R$ ,  $R_m$ ,  $A$ ,  $Na$ . Так как нас в основном интересует гидродинамический случай, сформулируем ее для обычного числа Рейнольдса.

При заданных  $A$  и  $R_m$  варьируя всевозможные возмущения, найдем минимальное значение  $R=R_0$ , при котором  $dE/dt$  обращается в нуль. Из равенства  $dE/dt=0$  следует выражение для числа Рейнольдса

$$R = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega / \int_{\Omega} \left[ (A h_k h_j - v_k v_j) \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + A h_k v_j \left( \frac{\partial H_j}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial x_j} \right) - \frac{A}{R_m} \left( \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \right)^2 \right] d\Omega. \quad (1)$$

Таким образом, число Рейнольдса рассматривается как функционал на произвольных полях возмущений  $v_k$ ,  $h_k$ . Требуется найти минимум этого функционала в классе соленоидальных возмущений  $\left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial h_j}{\partial x_j} = 0 \right)$ , обращаящихся в нуль на границе области  $\Omega$ .

Задача сводится к безусловной вариационной проблеме с помощью лагранжева функционала

$$\Phi = R + \int_{\Omega} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \lambda d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} \varphi d\Omega, \quad (2)$$

где  $\lambda(x, y, z)$ , и  $\varphi(x, y, z)$  — множители Лагранжа.

Варируя функционал (2) с учетом однородных условий и используя интегрирование по частям, получаем следующую систему уравнений Эйлера — Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 2/R \cdot \Delta v_k &= v_j \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) - A h_j \left( \frac{\partial H_k}{\partial x_j} - \frac{\partial H_j}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}; \\
 2/R_m \cdot \Delta h_k &= -h_j \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) + \\
 &+ v_j \left( \frac{\partial H_k}{\partial x_j} - \frac{\partial H_j}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}; \\
 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0; \quad \frac{\partial h_j}{\partial x_j} = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (3) сохраняет свой вид, если экстремизировать не  $Re$ , а  $R_m$  или  $A$ .

В совокупности с однородными граничными условиями система (3) представляет собой задачу на собственные значения минимизируемого параметра. Если разыскивать минимум функционала (2) в подклассе возмущений с  $h_k \equiv 0$ , то получается чисто гидродинамическая задача Орра — Серрина с той, однако, разницей, что основное течение  $U_k$  определяется МГД-уравнениями. Отсюда следует, что присутствие возмущений магнитного поля  $h_k$  не может увеличить минимальное значение числа Рейнольдса, удовлетворяющего условию стационарности энергии. Стабилизирующее воздействие магнитного поля обнаруживается через деформацию профиля скорости.

Аналогичным образом рассматривается частный случай  $v_k \equiv 0$ . Согласно второму уравнению (3), в этом случае величина  $R_{m_0} = \min_{h_k} R_m$  зависит только от конфигура-

ции поля скорости основного течения. Если основное течение симметрично относительно начала координат, т. е.  $U_k(x_j) = U_k(-x_j)$ , и граничные условия для возмущений магнитного поля допускают преобразование  $x_j$  на  $-x_j$ , то эта задача с точностью до обозначений совпадает с первой, когда  $h_k \equiv 0$ . Поэтому учет взаимодействия  $h_k$  и  $v_k$  не может привести к увеличению  $R_{m_0}$ .

Заметим, что оба частных случая ( $v_k \equiv 0$  и  $h_k \equiv 0$ ) не являются локальными экстремумами функционала  $R$ , так как уравнения (3), вообще говоря, не допускают таких решений. Если в качестве собственного значения ра-

ыскивается число Альфвена при заданных  $R$  и  $R_m$ , то для существования нетривиального решения  $v_k$  и  $h_k$  должны быть отличны от нуля.

В случае, если  $\frac{\partial H_k}{\partial x_j} - \frac{\partial H_j}{\partial x_k} \equiv 0$ , система (3), расщепляется на две независимых подсистемы.

Рассмотрим плоскопараллельный случай

$$U_x = U; U_y = 0; H_x = P(y); H_y = H_0 = \text{const}; H_z = F(y); \quad (4)$$

После Фурье-преобразования система (3) примет вид

$$\begin{aligned} 2/R_m \cdot (p'' - k^2 p) &= -hU' + vP' + i\alpha\varphi; & 2/R_m \cdot (f'' - k^2 f) &= \\ &= vF' + i\beta\varphi; \\ 2/R_m \cdot (h'' - k^2 h) &= -pU' - uP' - wF' + \varphi'; & i\alpha p + i\beta f + h' &= 0; \\ 2/R \cdot (u'' - k^2 u) &= U'v - AhP' + i\alpha\lambda; & 2/R \cdot (w'' - k^2 w) &= \\ &= -AhF' + i\beta\lambda; \end{aligned} \quad (5)$$

$$2/R \cdot (v'' - k^2 v) = U'u + ApP' + AfF' + \lambda'; \quad i\alpha u + i\beta w + v' = 0,$$

где  $u, v, w, p, h, f, \lambda, \varphi$  — Фурье-образы соответствующих компонент векторов скорости и напряженности магнитного поля возмущенного движения и лагранжевых множителей;  $\alpha$  и  $\beta$  — волновые числа:  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ; штрихом обозначено дифференцирование по  $y$ .

Граничные условия для возмущений скорости имеют стандартный вид  $u = v = w = 0$  при  $y = \pm 1$ , а граничные условия для возмущений магнитного поля зависят от свойств внешней среды, но на бесконечности возмущения предполагаются исчезающими. Поэтому для неидеально проводящих стенок область интегрирования системы (5) должна быть расширена за рамки канала, причем, естественно, вне канала  $v_k = 0$ .

Хотя формально сумма порядков в системе (5) равна 14, она легко приводится к системе уравнений 12-го порядка.

Как и в чисто гидродинамическом случае, задача на собственные значения имеет только вещественный спектр. В этом можно убедиться, умножив соответствующие уравнения на  $u^*, \dots, f^*$ ; суммируя их и интегрируя по

области, занятой возмущениями:

$$\begin{aligned}
 & 1/R \cdot \int (|u'|^2 + |v'|^2 + |w'|^2 + k^2(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2)) dy + \\
 & + A/R_m \cdot \int (|p'|^2 + |h'|^2 + |f'|^2 + k^2(|p|^2 + |h|^2 + \\
 & + |f|^2)) dy = \operatorname{Re} \left\{ \int [(A ph^* - uv^*) U' + A(uh^* - vp^*) P' + \right. \\
 & \left. + A(wh^* - vf^*) F'] dy \right\}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Поскольку все коэффициенты при  $R$ ,  $R_m$  и  $A$  в (6) вещественны, то спектр любой из этих величин тоже веществен.

Из системы (5) следует, что если имеется нетривиальное решение при некоторых  $\alpha$ ,  $\beta$  с собственным вектором  $\{u, \dots, f\}$ , то существует решение для  $-\alpha$ ,  $-\beta$  с комплексно-сопряженным собственным вектором при том же собственном значении. Когда  $F' \equiv 0$ , а это наиболее часто встречающийся вариант, наряду с решением  $\{\alpha, \beta, u, \dots, f\}$  существует решение  $\{-\alpha, \beta, u^*, v^*, -w^*, p^*, h^*, -f^*\}$  с тем же собственным значением. В этом случае достаточно ограничиться исследованием первого квадранта в плоскости  $(\alpha, \beta)$ .

В случае  $R_m \ll 1$  возможно упрощение энергетической задачи, подобно тому как это достигается в линейной теории устойчивости. Разлагая поля  $v_k$  и  $h_k$  в ряды по  $R_m$

$$h_k = h_k^{(1)} R_m + h_k^{(2)} R_m^2 + \dots; \quad v_k = v_k^{(0)} + v_k^{(1)} R_m + \dots,$$

подставляя их в уравнения (II.7.11) и ограничиваясь членами нулевого порядка по  $R_m$ , получим систему

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{R} \Delta v_k + \\
 + \left( \frac{Na^2}{R} \right) H_j \frac{\partial h_k}{\partial x_j}; \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$H_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \Delta h_k = 0; \quad \frac{\partial h_j}{\partial x_j} = 0; \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0.$$

Умножая первое уравнение на  $v_k$ , второе на  $h_k$ , складывая и интегрируя по области, приходим к уравнению

энергии

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega} v_k v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} d\Omega - 1/R \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega - \frac{Ha^2}{R} \int_{\Omega} \times \\ \times \left( \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega. \quad (8)$$

Поиск минимального значения  $R$ , когда  $dE/dt=0$ , сводится к минимизации функционала

$$\Phi = \frac{dE}{dt} + \int_{\Omega} \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \cdot d\Omega$$

на всевозможных полях скоростей  $v_k$ , удовлетворяющих граничными условиями. Возмущения магнитного поля  $h_k$  не считаются независимыми, а определяются вторым уравнением системы (7). При варьировании  $\Phi$  вариации поля  $\delta h_k$  посредством интегрирования по частям можно свести к вариациям  $\delta \Delta h_k$ , которые в силу (7) равны  $-H_j(\partial \delta v_k / \partial x_j)$ .

Уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$\Delta v_k = 1/2 \cdot R v_j \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} - Ha^2 H_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j}; \\ \Delta h_k = -H_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j}; \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0; \quad \frac{\partial h_j}{\partial x_j} = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим плоскопараллельный случай  $U_k = \{U(y); 0; 0\}$  и проведем фурье-преобразование по  $x$  и  $z$ . Тогда из (9) получим

$$u'' - k^2 u = 1/2 \cdot R v U' + i\alpha \lambda - Ha^2 (H_v g' + ik H_k g); \\ v'' - k^2 v = 1/2 \cdot R u U' + \lambda' - Ha^2 (H_v h' + ik H_k h); \\ w'' - k^2 w = i\beta \lambda - Ha^2 (H_v f' + ik H_k f); \\ g'' - k^2 g = -H_v u' - ik H_k u; \\ h'' - k^2 h = -H_v w' - ik H_k v; \\ f'' - k^2 f = -H_v v' - ik H_k w; \\ i\alpha u + i\beta w + v' = 0; \quad i\alpha g + i\beta f + h' = 0. \quad (10)$$

Порядок системы (10) можно понизить, если иметь в виду задачу на собственные значения.

Умножая первое уравнение на  $i\alpha$ , третье на  $i\beta$ , складывая и используя уравнение неразрывности, получим выражение для  $\lambda$

$$k_2\lambda = v''' - \alpha^2 v' + 1/2 \cdot i\alpha R U'v + \text{Ha}^2 (H_y h'' + ik H_k h').$$

Подставляя его во второе уравнение и учитывая пятое, найдем

$$v^{\text{IV}} - 2k^2 v'' + k^4 v + 1/2 \cdot i\alpha R (U'v)' + 1/2 \cdot k^2 R u U' - \\ - \text{Ha}^2 (H_y^2 v'' + 2ik H_y H_k v' - k^2 H_k^2 v) = 0.$$

Полезно ввести переменные  $\psi = \beta u - \alpha w = 1/\beta \cdot (k^2 u - i\alpha v')$  и  $\chi = \beta g - \alpha f$ . Тогда, умножая первое уравнение (10) на  $\beta$ , третье на  $\alpha$ , вычитая и проводя аналогичные операции с возмущениями магнитного поля, получим систему восьмого порядка

$$v^{\text{IV}} - 2k^2 v'' + k^4 v = -i\alpha R U'v - 1/2 \cdot i\alpha R U''v - \\ - 1/2 \cdot \beta R U'\psi + \text{Ha}^2 (H_y v'' + 2H_y H_k ikv' - k^2 H_k^2 v); \\ \psi'' - k^2 \psi = 1/2 \beta R U' - \text{Ha}^2 (H_y \chi' + ik H_k \chi); \quad (11)$$

$$\chi'' - k^2 \chi = -H_y \psi' - ik H_k \psi$$

с граничными условиями  $v = v' = \psi = \chi = 0$  при  $y = \pm 1$ . Последнее предполагает наличие идеально проводящих стенок. При  $\beta = 0$  последние два уравнения (11) имеют только тривиальное решение и задача сводится к отысканию спектра первого уравнения.

К сожалению, систему (9) не удастся свести только к уравнениям для  $v_k$ , как это сделано в линейной теории для плоскопараллельных течений. Тем не менее роль последнего члена в первом уравнении (9) сравнительно невелика. Рассмотрим случай продольного поля  $H_x$ . Если пренебречь этим членом, то минимум  $R$  достигается на возмущениях, не зависящих от  $x$ , и потому рассмот-

рение полной системы (9) не может привести к увеличению  $R_0$ . С другой стороны, обращаясь к уравнению (8), видим, что, если даже считать  $v_k$  и  $h_k$  независимыми, то наличие магнитных возмущений  $h_k$  может только стабилизировать течение, увеличив величину  $R_0$ . Отсюда следует, что наложение продольного поля не изменяет энергетической оценки  $R_0$ , хотя хорошо известно, что такое поле увеличивает как величину  $R_*$ , рассчитанную по линейной теории, так и экспериментальное число Рейнольдса для перехода.

Разобранный пример продольного магнитного поля свидетельствует о том, что учет зависимости возмущений магнитного поля от возмущений поля скоростей слабо влияет на величину  $R_0$ . Поэтому огрубление оценки  $R_0$  незначительно, если  $h_k$  и  $v_k$  считать независимыми. Тогда из (8) следует, что минимальное значение  $R$  реализуется в случае  $h_k \equiv 0$ . Таким образом, мы приходим к задаче Орра — Серрина, в которой профиль скорости основного течения  $U$  определяется из МГД-уравнений. В такой постановке здесь будут исследованы течение Гартмана и МГД-течение Куэтта в поперечном магнитном поле.

Представляет интерес стабилизация течения в плоском канале под действием трансверсального магнитного поля  $H_z$ . Такое поле не деформирует профиля скорости основного течения и не взаимодействует с двумерными возмущениями, а сохраняет значение  $R_*$  по линейной теории. Но поле  $H_z$  может увеличить энергетическую оценку  $R_0$ , что следует из (8), в котором стабилизирующая роль последнего члена с ростом числа  $Ha$  возрастает. Но если гидродинамические возмущения не зависят от координаты  $z$ , возмущения магнитного поля становятся независимыми. Следовательно, воздействие трансверсального поля может увеличить  $R_0$  только до значения, отвечающего минимуму  $R$  для двумерных чисто гидродинамических возмущений. Так, для течения Пуазейля эта оценка может быть повышена с 49,6 до 87,6, а для течения Куэтта — с 20,6 до 44,3, т. е.  $R_0$  увеличивается примерно вдвое.

Пренебрегая взаимодействием полей  $h_k$  и  $v_k$ , мы допускаем известную погрешность, но она невелика, так же как это имело место в линейном анализе, где было

показано, что при  $\alpha \sim 1$  и более влияние на устойчивость взаимодействия полей мало по сравнению с влиянием формы профиля скорости. Дополнительным аргументом в пользу принимаемого упрощения служит то соображение, что чисто гидродинамическая задача представляет для нас больший интерес, так как позволяет выяснить влияние формы профиля скорости на устойчивость в целом.

При малых числах На результаты энергетического анализа течений Гартмана и МГД Куэтта будут слабо отличаться от разобранных в § 1 наст. главы случая  $Na=0$ . С ростом числа На картина линий уровня на рис. 47 будет деформироваться следующим образом: область минимума  $R$  смещается в сторону больших  $k$ , причем в этой области поверхность  $R(k, 0)$  становится более уплощенной. Асимметричное течение Куэтта имеет несколько большие значения  $R_0$  при умеренных На. При  $Na \rightarrow 0$  и  $Na \rightarrow \infty$  оценки для этих двух типов течения Куэтта совпадают. При  $Na=2,9$  значения  $R_0$  соответственно равны 50 и 68.

Линии уровня для течения Гартмана при  $Na=15$  показаны на рис. 50. Линии 1—6 отвечают значениям  $R=300, 320, 600, 800, 1000, 1400$ . Минимуму  $R$  соответствуют значения параметров  $R_0=292; k_0=6,01$ .

При расчетах нередко возникает вопрос, не пересекаются ли спектральные линии, следствием чего может быть потеря минимального собственного значения  $R$ .

Для выборочных значений На была рассчитана вторая спектральная ветвь  $R_2(k, \theta)$ . Во всем диапазоне  $k$  и  $\theta$  значения  $R_2$  превосходили  $R_1$ .

При достаточно больших значениях На профиль скорости вырождается в экспоненциальный. Положим  $y_1 = Na(1+y)$ ;  $k=k_1 \cdot Na$ ;  $R=$

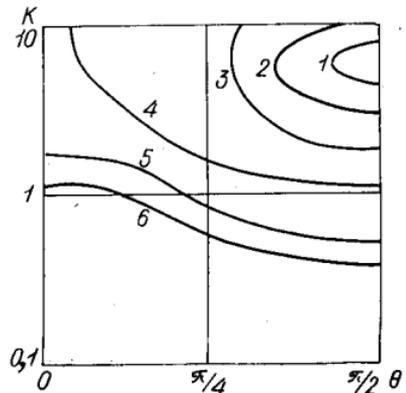


Рис. 50.

$= R_1 \cdot \text{Ha}$ . Тогда  $U = 1 - \exp(-y_1)$  и уравнение (1.5) примет вид

$$\left( \frac{d^2}{dy_1^2} - k_1^2 \right) \left[ e^{y_1} \left( \frac{d^2}{dy_1^2} - k_1^2 \right)^2 \times v_1 + \right. \\ \left. + ik_1 R_1 \cos \theta (v_1' - 1/2 v_1) \right] + 1/4 k_1^2 R_1^2 \sin^2 \theta e^{-y_1} v_1 = 0.$$

Эта задача на собственные значения имеет нетривиальные решения, причем минимальное значение ( $R_1 = 19,6$ ) достигается при значении  $k_1 = 0,4$ . Отсюда следует, что при больших  $\text{Ha}$  справедливы асимптотические соотношения

$$R_0 = 19,6 \cdot \text{Ha}; \quad k_0 = 0,4 \cdot \text{Ha}.$$

Зависимости  $R_0(\text{Ha})$  и  $k_0(\text{Ha})$  во всем диапазоне чисел  $\text{Ha}$  для течения Гартмана и антисимметричного течения Куэтта изображены на рис. 51 (кривые 1 и 2 соответственно). Выход на асимптотические зависимости происходит уже при  $\text{Ha} \geq 10$ .

Сопоставление результатов линейной теории, энергетического анализа и экспериментальных данных [20] для больших значений  $\text{Ha}$  приведено в табл. 5, которая демонстрирует уже известную ситуацию: энергетический анализ дает заниженные значения критических чисел Рейнольдса, линейная теория — завышенные. В реальных условиях существует некоторый диапазон чисел Рейнольдса, когда малые возмущения затухают, а доста-

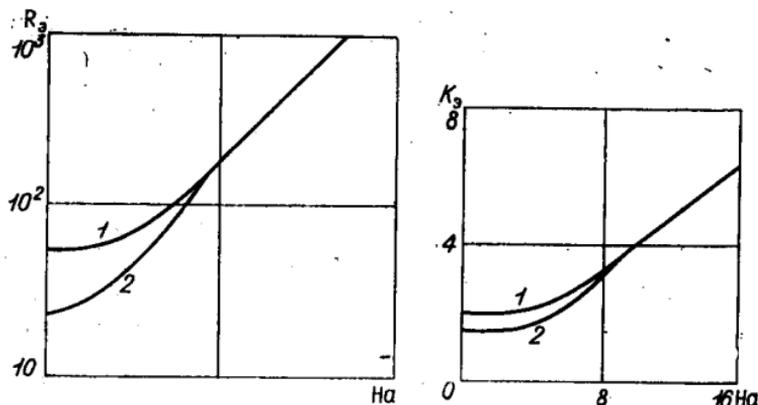


Рис. 51.

Т а б л и ц а 5

## Критические числа Рейнольдса для МГД-течений

Способ определения	$R_*/Na$	$R_*/Na$
Энергетический метод (двумерные возмущения) . . . . .	42,5	0,50
Энергетический метод . . . . .	19,6	0,40
Линейная теория	48 300,0	0,16
Эксперимент . . . . .	225,0	—

точно большие турбулизируют поток. Кроме того, есть диапазон, где энергия возмущения затухает, но не монотонно.

Полученные результаты для больших  $Na$  можно применить к другому гидродинамическому течению — пограничному слою с равномерным отсосом, который характеризуется асимптотическим профилем скорости экспоненциального типа. Член с постоянной поперечной скоростью основного течения в уравнениях для возмущений не дает вклада в уравнение энергии. Таким образом, течение в пограничном слое с отсосом заведомо устойчиво при  $R < 19,6$ .

Изложенные методы могут быть применимы для энергетического анализа турбулентного профиля средней скорости, в некоторых отношениях похожего на профиль Гартмана. Этот анализ базируется на том соображении, что турбулентный профиль скорости формируется при наличии пульсаций скорости. Поскольку при  $R < R_0$  любые пульсации затухают, то существование течения с турбулентным профилем скорости невозможно. Тем самым энергетический анализ позволяет оценить, при каком минимальном числе Рейнольдса возможно существование заданного турбулентного профиля скорости.

Приводим расчеты  $R_0$  [243] для профиля скорости при  $R_0 = 10^4$ , построенного с помощью аппроксимации опытных данных, которая описана в § 5 главы V.

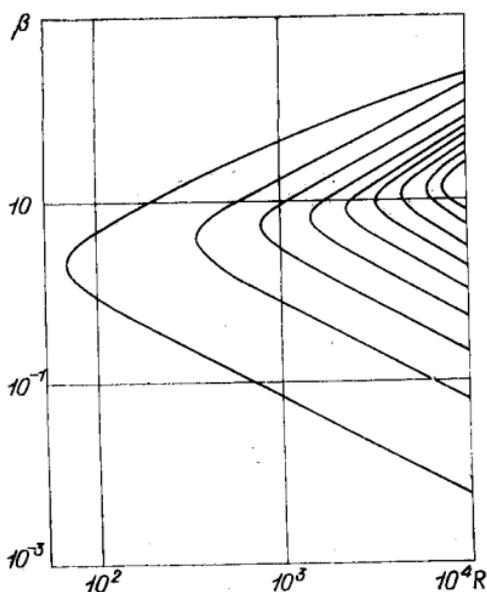


Рис. 52.

Минимальное значение  $R$  равно 72 и достигается при  $k=2,25$ . На рис. 52 показан спектр собственных значений  $R(\beta)$  при  $\theta=\pi/2$ . С ростом спектрального номера величина  $\beta$ , при которой достигается минимум, несколько увеличивается. Десять спектральных мод имеют минимум  $R$  менее чем  $10^4$ , так что при этом значении  $R$  энергетическая оценка ( $R_0 = 72$ ) слишком низка. Однако с ростом числа  $R$  заполненность профиля средней скорости

возрастает и  $R_0$  будет увеличиваться, как при течении в поперечном магнитном поле. Следует иметь в виду, что для турбулентных течений смысл  $R_0$  противоположен ламинарному случаю. При  $R < R_0$  ламинарный режим заведомо устойчив, а турбулентный заведомо не существует.

#### § 4. ОБОБЩЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Если в турбулентном потоке уменьшать число Рейнольдса, то наступает ламинизация. Интересно оценить значение  $R$ , при котором это происходит.

Задача Орра сводится к отысканию максимального числа Рейнольдса, при котором любые соленоидальные возмущения затухают монотонно. Поставим теперь вопрос по-другому: при каком минимальном числе Рейнольдса еще возможно существование пульсационного, в среднем стационарного движения при стационарных внешних условиях? Ответ может быть получен, если решить более широкую задачу: при данном числе Рей-

нольдса и некоторых дополнительных условиях найти максимально возможную турбулентную энергию. То число Рейнольдса, для которого этот максимум впервые станет равным нулю, и решит исходную задачу. Но, кроме того, для больших чисел Рейнольдса мы получим оценку сверху для пульсационной энергии турбулентного потока, что представляет, пожалуй, основной интерес.

Уравнение стационарного турбулентного потока получается, если в (II.1.1) положить  $V_k = U_k + v_k$ , где  $U_k$  и  $v_k$  — средняя и пульсационная скорости, усреднить результат и вычесть из исходного уравнения (II.1.1). Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial (v_k v_j - \overline{v_k v_j})}{\partial x_j} = \\ = -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{R} \Delta v_k; \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$U_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{R} \Delta U_k - \frac{\partial \overline{v_k v_j}}{\partial x_j}; \quad \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$

Сказанное нуждается в пояснении.

Во-первых, говоря о средних величинах, необходимо придать определенный смысл операции усреднения, которая в (1) и (2) обозначена чертой. В теоретических исследованиях по турбулентности обычно применяется наибольшее общее статистическое усреднение по ансамблю реализаций. Но необходимо отметить, что плодотворность статистического подхода обусловлена анализом большого числа однородных событий и подсчетом числа состояний, соответствующих той или иной ячейке фазового объема. В гидродинамике эта методика встречает ряд принципиальных трудностей. Прежде всего, неясно, как определить микроканоническое распределение, поскольку вязкая жидкость не является консервативной системой. Предположение о том, что ансамбль реализаций состоит из всевозможных равновероятных решений уравнений Навье — Стокса, с одной стороны, необоснованно, а с другой — неудобно, так как решения таких уравнений — малоподходящие объекты для статистики из-за

большой сложности. Поэтому мы используем операцию усреднения по всем однородным координатам, например по координате  $z$ :

$$\bar{f} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left( 1/(2L) \cdot \int_{-L}^L f(z) dz \right).$$

Конечно, такой подход менее общий, чем статистическое усреднение, и, в частности, непригоден для нестационарной трехмерной турбулентности, но он позволяет производить усреднение не символически, а так сказать, фактически, путем интегрирования по однородным переменным.

Кроме того, требует пояснения оговорка насчет дополнительных условий. Если никаких условий не ставить, то ясно, что функционал  $E = 1/2 \int_{\Omega} v_k^2 d\Omega$  будет неограни-

ченным и никакой содержательной оценки для  $E$  получить нельзя. Поэтому необходимо ставить задачу не на абсолютный, а на условный экстремум функционала, выбирая в качестве дополнительных условий те, которым удовлетворяет реальный турбулентный поток. При рассмотрении установившегося течения наиболее общими условиями такого рода могут служить условия стационарности всех интегральных моментов, которые получают из цепочки Фридмана — Келлера. Но, чтобы для пробных мгновенных полей получить квазилинейную задачу, допускающую решения в виде грамонических волн и сводящуюся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимо ограничиться лишь условиями стационарности вторых моментов, которые легко получаются из (1):

$$\Phi_{kj} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v_k v_j d\Omega = \int_{\Omega} \left[ p \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) - v_s \left( v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_s} + \right. \right. \\ \left. \left. + v_k \frac{\partial U_j}{\partial x_s} \right) - \frac{2}{R} \frac{\partial v_k}{\partial x_s} \frac{\partial v_s}{\partial x_j} \right] d\Omega = 0. \quad (3)$$

Если в (3) рассматривать  $p$  как независимую варьируемую функцию, то это приводит к наложению нефизиче-

ских кинематических связей, которые совместно с уравнением неразрывности переопределяют задачу. Кроме того, соответствующим подбором  $p(x_k)$  всегда можно удовлетворить условиям (3) при любых полях  $v_k$ .

Но если воспользоваться связью между  $p$  и  $v_k$ , вытекающей из уравнения (1), после применения операции  $\partial/\partial x_k$

$$\Delta p = (-\partial^2/\partial x_k \partial x_j) (U_k v_j + U_j v_k + v_k v_j),$$

то вариационная задача получится нелинейной, так как соотношения (3) будут содержать кубические члены.

Наличие членов с давлением в условиях стационарности (3), как мы видим, вызывает серьезные трудности. Поэтому можно попытаться исключить давление, применив к уравнениям Навье — Стокса (1) операцию rot. Это дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} - \Omega_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \\ - \omega_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \nu \Delta \omega_k, \end{aligned}$$

где  $\Omega_k$ ,  $\omega_k$  — завихренность исходного и пульсационного движений. Умножая это уравнение на  $v_k$ , уравнение (1) на  $\omega_k$ , суммируя и интегрируя результат по области  $\Omega$ , с учетом однородных граничных условий и уравнений неразрывности для вихря получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega_k v_k d\Omega = - \int_{\Omega} \left[ v_k v_j \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_j} + (v_k \omega_j - \omega_k v_j) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \frac{1}{R} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \right] d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Для течения в плоском канале интегрирование по  $\Omega$  следует понимать как усреднение по  $x$  и  $z$ , при интегрировании по  $y$  это условие принимает вид

$$2 \int_{-1}^1 \overline{v_y v_z} U' dy - \frac{1}{R} \int_{-1}^1 \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j}} dy = 0. \quad (4)$$

Выше не раз отмечалось, что минимум числа  $R$ , обеспечивающий существование нетривиального решения для вариационной энергетической задачи, достигается на поле квазипульсаций, не зависящих от  $x$  и синусоидальных по  $z$ . Такое поле скоростей автоматически удовлетворяет условию (3), так что улучшить оценку для  $R_0$  этим путем не удастся.

Заметим, что для реального турбулентного потока в канале из уравнений (2) непосредственно следует  $\overline{v_y v_z} \equiv \equiv 0$ , поэтому из (4) вытекает интересное соотношение

$$\int_{\Omega} \vec{\omega} \cdot \text{rot } \vec{\omega} d\Omega = 0.$$

Другим путем исключения давления является операция проектирования уравнений Навье — Стокса на подпространство соленоидальных векторов, подобно тому как это сделано в монографии Ладыженской [127], и формулировка условий стационарности, не содержащих давления. Но на этом пути тоже встречаются трудности, пока непреодолимые. Поэтому мы довольствуемся выполнением вместо шести лишь одного условия стационарности, которое получается из (3) сверткой по индексам  $k$  и  $j$ , вследствие чего давление исключается:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} 1/2 v_k^2 d\Omega = - \int_{\Omega} \left[ v_k v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)^2 \right] d\Omega. \quad (5)$$

Таким образом, мы вновь пришли к условию стационарности пульсационной энергии, но в совокупности с уравнением Рейнольдса (2), которое для одномерного течения в канале имеет вид

$$U' = R(\overline{v_x v_x} - \lambda_0 y), \quad (6)$$

где  $\lambda_0$  — безразмерный градиент давления. Если в качестве масштаба скорости выбрана ее средняя расходная величина, т. е.  $\int_{-1}^1 U dy = 2$ , то величина  $\lambda_0$  определяется

выражением

$$\lambda_0 = 3/R + (3/2) \int_{-1}^1 y \overline{v_x v_y} dy.$$

Подставляя выражение (6) в (5), для одномерного течения в канале получим

$$dE/dt = R \int_{-1}^1 (\lambda_0 y - \overline{v_x v_y}) \overline{v_x v_y} dy - \frac{1}{R} \int_{-1}^1 \overline{(\partial v_k / \partial x_j)^2} dy = 0. \quad (7)$$

Условие стационарности (7) не является квадратичным функционалом над полем скорости  $v_k$  в отличие от классической задачи Орра — Серрина. Если в последнем случае пробное поле  $v_k$ , минимизирующее  $R$ , определялось с точностью до произвольного амплитудного множителя, так что его энергия могла быть также произвольной, то в новой постановке величину энергии вполне можно найти.

Грубые оценки для  $E$  можно получить непосредственно из (7). Действительно, если представить (7) в виде

$$dE/dt = R \int_{-1}^1 [(1/2 \lambda_0 y)^2 - (1/2 \lambda_0 y - \overline{v_x v_y})^2] dy - \frac{1}{R} \int_{-1}^1 \overline{(\partial v_k / \partial x_j)^2} dy = 0$$

и учесть, что  $\int_{-1}^1 \overline{(\partial v_k / \partial x_j)^2} dy \geq \pi^2/2E$ , как это вытекает из известного неравенства Гюнтера (см. [127]), то в силу отрицательности второго слагаемого в первом интеграле получится неравенство

$$E \leq 1/3 (\lambda_0 R / \pi)^2. \quad (8)$$

Если в качестве масштаба скорости выбрать динамическую скорость  $v_* = \sqrt{\lambda_0}$ , то (8) примет вид

$$E_* \leq 1/3 (R_* / \pi)^2, \quad (9)$$

где  $R_* = v_* R$ ;  $E_*$  — энергия возмущений, нормированная к  $v_*^2$ .

Покажем, что оценка для минимального значения  $R$  при условии (7) не зависит от энергии возмущений. Подставляя выражение для  $\lambda_0$  в (7), получим

$$\begin{aligned} dE/dt = 3 \int_{-1}^1 y \overline{v_x v_y} dy + R \left[ \frac{3}{2} \left( \int_{-1}^1 y \overline{v_x v_y} dy \right)^2 - \right. \\ \left. - \int_{-1}^1 \overline{(v_x v_y)^2} dy \right] - \frac{4}{R} \int_{-1}^1 \overline{(\partial v_k / \partial x_j)^2} dy = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

В силу неравенства Шварца имеем

$$\left[ \int_{-1}^1 y \overline{v_x v_y} dy \right]^2 \leq \int_{-1}^1 y^2 dy \int_{-1}^1 \overline{(v_x v_y)^2} dy = 2/3 \int_{-1}^1 \overline{(v_x v_y)^2} dy,$$

следовательно, выражение в квадратных скобках в формуле (10) не положительно. Отсюда вытекает, что оценки для величины числа Рейнольдса, полученные в задаче Орра, будут справедливы и для нелинейной вариационной задачи при любом значении  $E$ , т. е. минимальное число Рейнольдса, для которого выполняется (10), будет не меньше  $R_*$ . С другой стороны, если считать энергию  $E$  бесконечно малой, выражение (7) приобретает тот же вид, что и в классической задаче Орра — Серрина, а поскольку минимальное число Рейнольдса не зависит от энергии, то обобщенная постановка не может улучшить оценки для  $R_*$ . Но это нас не должно обескураживать, поскольку задача оценки турбулентной энергии для данного числа Рейнольдса представляет самостоятельный интерес и, по нашему мнению, не менее важна, чем улучшение  $R_*$ .

Для получения более точных оценок величины  $E$  поставим вариационную задачу: в классе соленоидальных квазипульсаций  $v_k$ , удовлетворяющих условиям прилипания, найти максимум энергии  $E$  при условии ее стационарности (10). С учетом этой формулировки составим

функционал Лагранжа, вида

$$\Phi = \mu \int_{\Omega} v_k^2 d\Omega + 3 \int_{\Omega} y v_x v_y d\Omega + R \left[ \frac{3}{2} \left( \int_{\Omega} y v_x v_y d\Omega \right)^2 - \int_{\Omega} (v_x v_y)^2 d\Omega \right] - \frac{1}{R} \int_{\Omega} (\partial v_k / \partial x_j)^2 d\Omega + \int_{\Omega} p (\partial v_k / \partial x_k) d\Omega, \quad (11)$$

где  $\mu = \text{const}$  и  $p(x, y, z)$  — множители Лагранжа.

В силу перестановочности операции варьирования с операциями усреднения и дифференцирования имеем

$$\begin{aligned} \delta \int_{-1}^1 \overline{(v_x v_y)^2} dy &= 2 \int_{-1}^1 \overline{v_x v_y} (\overline{v_x \delta v_y} + \overline{v_y \delta v_x}) dy; \\ \delta \left( \int_{-1}^1 y \overline{v_x v_y} dy \right)^2 &= 2 \int_{-1}^1 y \overline{v_x v_y} dy \int_{-1}^1 y (\overline{v_x \delta v_y} + \overline{v_y \delta v_x}) dy; \\ \delta \int_{-1}^1 \overline{(\partial v_k / \partial x_j)^2} dy &= -2 \int_{-1}^1 \overline{\Delta v_k \delta v_k} dy. \end{aligned}$$

Собирая члены с  $\delta v_k$  под знаком интегрирования, получим

$$\begin{cases} \Delta v_x - R^2 \overline{v_x v_y v_y} - \mu R v_x = y v_y R (3/2 - \lambda_0 R) + \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \Delta v_y - R^2 \overline{v_x v_y v_x} - \mu R v_y = y v_x R (3/2 - \lambda_0 R) + \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \Delta v_z = \frac{\partial p}{\partial z}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где  $v_x = v_y = v_z = 0$  при  $y = \pm 1$ . Из-за однородности задача (12) всегда имеет тривиальное решение  $v_k \equiv 0$ . Поэтому сначала должна быть решена задача на собственные значения  $R$ , но в силу нелинейности (12) эта задача имеет, вообще говоря, непрерывный спектр и формулируется так: найти значение  $R = R_*$ , начиная с которого существует нетривиальное решение (12), и определить все решения при  $R > R_*$ .

Линейные спектральные задачи в ограниченных областях имеют дискретный спектр, и их решения опреде-

ляются с точностью до произвольного амплитудного множителя  $a$ . В нелинейной задаче величина  $a$  определяется в ходе решения. Разница между постановками линейной и нелинейной спектральных задач исчезнет, если в нелинейной задаче задать значение  $a > 0$ . Тогда ее спектр будет дискретным, как и в задаче линейной, которую можно рассматривать в качестве предельного случая нелинейной при заданном  $a = 0$ .

Задача (12) допускает решения, синусоидальные по однородным координатам. Это связано с тем, что она содержит только усредненные нелинейности. В силу того, что во всех предыдущих случаях экстремум вариационной задачи достигался на возмущениях, зависящих только от  $y$  и  $z$ , но не от  $x$ , мы априорно предположим, что здесь имеет место та же ситуация, и рассмотрим возмущения типа

$$v_x = u(y) \cos \beta z; \quad v_y = v(y) \cos \beta z; \quad v_z = w(y) \sin \beta z. \quad (13)$$

Подставляя эти выражения в систему (12) и исключая давление, получим

$$\begin{aligned} u'' - (\beta^2 - \mu R + 1/2 R^2 v^2) u &= -R y v (\lambda_0 R - 3/2); \\ v^{IV} - (2\beta^2 - \mu R) v'' + \beta^2 (\beta^2 - \mu R + 1/2 R^2 u^2) v &= \\ &= \beta^2 R y u (\lambda_0 R - 3/2). \end{aligned} \quad (14)$$

Параметры  $\lambda$  и  $\mu$  определяются соотношениями

$$\lambda_0 = 3/R + (3/2) \int_0^1 y u v dy; \quad \mu = (1/E) \int_0^1 (U' + 3y) u v dy,$$

где

$$E = \int_0^1 (u^2 + v^2 + w^2) dy; \quad w = -v'/\beta; \quad U' = R(1/2 uv - \lambda_0 y). \quad (15)$$

Выражение для лагранжевого множителя  $\mu$  получено путем умножения уравнений (12) на  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$  — соответственно путем сложения, интегрирования по области  $\Omega$  и сравнения с условием стационарности (5).

Система (14) решалась методом простой итерации путем «замораживания» коэффициентов и правых

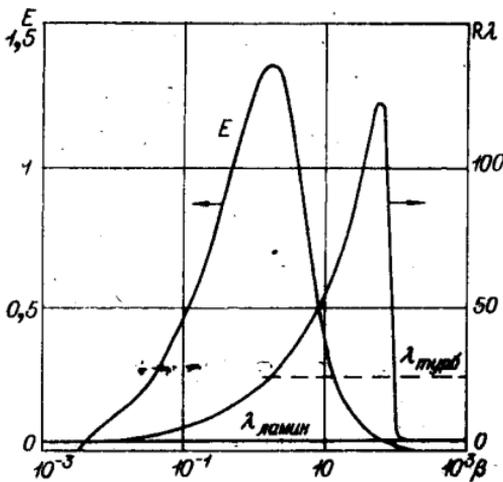


Рис. 53.

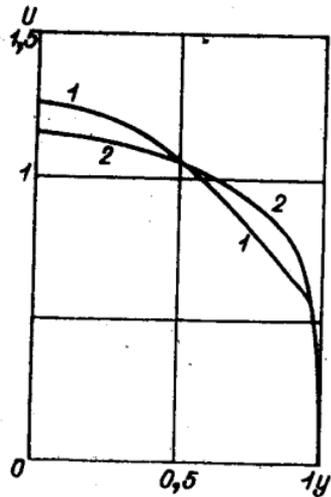


Рис. 54.

частей. На каждом итерационном шаге расцепленная система решалась методом разностной прогонки. Во всех случаях процесс итерации сходился, правда, довольно медленно.

Расчет первой спектральной моды при  $R=10^4$  показан на рис. 53. Нетривиальные решения при данном значении числа Рейнольдса существуют в диапазоне  $0,004 < \beta < 110$ . Вне этого интервала пульсационная энергия равна нулю, а коэффициент трения  $\lambda_0 = 3/R$ , что соответствует ламинарному течению. Пульсационная энергия достигает максимального значения 1,36 при  $\beta = 2$ . Величина  $\lambda_0$  для этого  $\beta$  близка к экспериментальному значению, соответствующему выбранному числу Рейнольдса, но это случайное совпадение. Максимальная энергия  $E$  более чем на порядок меньше значения, даваемого оценкой (8), но значительно выше реальных значений пульсационной энергии в турбулентном потоке.

Интересно сопоставить профиль скорости  $U$ , вычисленный на основе полученного решения при помощи (15), с экспериментальным. На рис. 54 в виде кривой 1 изображен рассчитанный профиль скорости при  $\beta = 2$ . Кривая 2 соответствует профилю усредненной скорости турбулентного потока, по Лауферу [430]. В непосредственной окрестности стенки профили 1 и 2 имеют сходный

характер поведения типа пограничного слоя. В ядре потока расчетный профиль сильно отличается от экспериментального, имея там точку перегиба. Значение  $U_{\max} = 1,26$  лежит ниже, чем у параболы (1,5), но выше экспериментального (1,14).

Опираясь на условие стационарности энергии (5), можно оценить и другие интегральные характеристики турбулентного движения, например коэффициент сопротивления  $\lambda_0$ . Такого типа вариационная задача формулировалась Буссе [272] и Нихолем [468, 469]. Конкретные расчеты  $\lambda_0$  для ряда течений приведены в работах [273, 448, 463, 464].

Для течения в канале вариационная задача сводится к максимизации функционала

$$\Phi = \lambda_0 + R \int_{-1}^1 (\lambda_0 y - \overline{v_x v_y}) \overline{v_x v_y} dy - \frac{1}{R} \int_{-1}^1 \left( \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_f}} \right)^2 dy + \\ + \frac{1}{R} \int_{-1}^1 p \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_k}} dy.$$

После варьирования получаются уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\Delta v_x = f v_y + \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \Delta v_y = f v_x + \frac{\partial p}{\partial z}; \quad \Delta v_z = \frac{\partial p}{\partial z}; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad (16)$$

$$f = R^2 (\overline{v_x v_y} - \lambda_1 y); \quad \lambda_1 = 1/2 \lambda_0 + 1/2 \left( \int_{-1}^1 \overline{(v_x v_y)^2} dy \right) \Bigg|$$

$$\Bigg| \int_{-1}^1 y \overline{v_x v_y} dy;$$

$$v_x = v_y = v_z = 0 \text{ при } y = \pm 1.$$

Ограничиваясь классом решений (13), приходим к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$u'' - \beta^2 u = f v; \\ v^{IV} - 2\beta^2 v'' + \beta^4 v = -\beta^2 f u;$$

$$f = R^2(1/2uv - \lambda_1 y); \quad (17)$$

$$\lambda_1 = 1/2\lambda_0 + 1/4 \int_{-1}^1 u^2 v^2 dy / \int_{-1}^1 y u v dy;$$

$$u = v = v' = 0 \text{ при } y = \pm 1.$$

Нелинейная задача на собственные значения (17) содержит три параметра ( $\lambda_0$ ,  $R$  и  $\beta$ ), каждый из которых может рассматриваться как искомого собственное значение. При  $R < 49,6$  нетривиальных решений задача не имеет. При  $R > R_c$  существует интервал по  $\beta$ , для каждой точки которого найдется собственное значение  $\lambda_0$ , и, вообще говоря, не одно. Спектральная картина при  $R = 10^4$  отражена на рис. 55. Сплошная линия  $\lambda_0 = 3/R$ , параллельная оси абсцисс, отвечает тривиальному решению. Точки пересечения этой горизонтали с другими линиями соответствуют спектральным значениям  $\beta$  линеаризованной задачи Орра — Серрина и служат точками бифуркации задачи нелинейной. Сплошные линии  $\lambda_0(\beta)$  отвечают нетривиальным решениям нелинейной задачи. С ростом  $\beta$  первое нетривиальное решение появляется при  $\beta \geq 0,004$ , число их достигает 15 при  $\beta \approx 40$  и затем уменьшается до нуля при  $\beta > 110$ . Диапазоны существования нетривиаль-

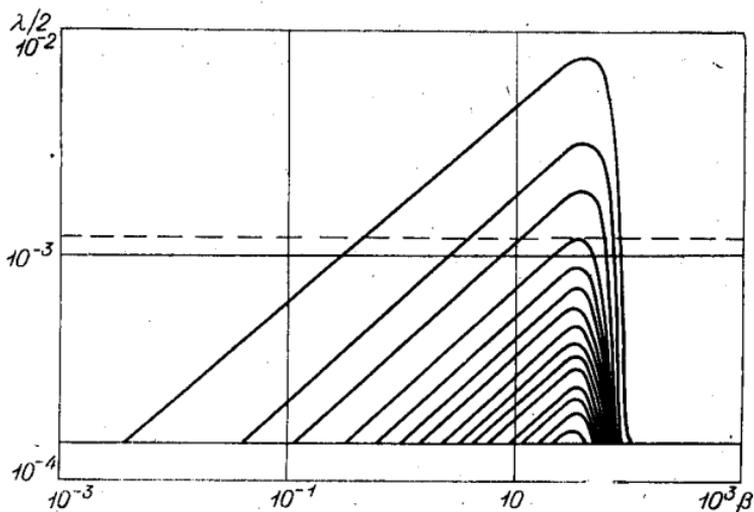


Рис. 55.

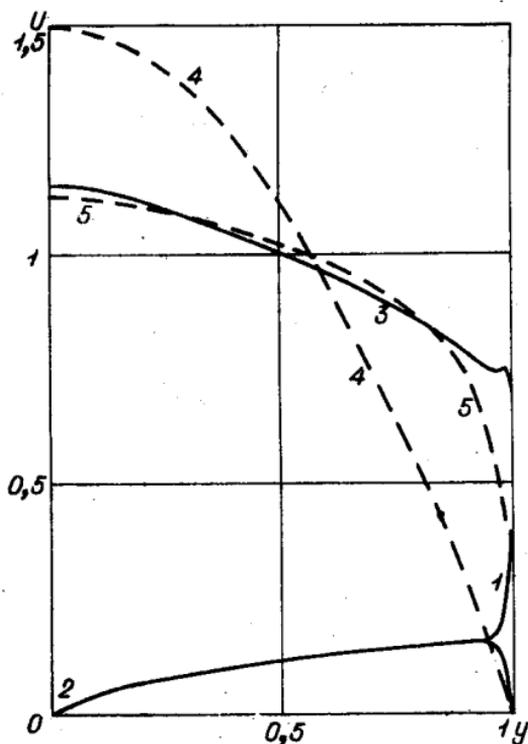


Рис. 56.

ных решений для вариационных задач с функционалами  $E$  и  $\lambda_0$  совпадают, поскольку точки бифуркации отвечают одной и той же линейной задаче, а генерация нелинейных колебаний, как мы видим, носит характер мягкого возбуждения.

Максимальное значение  $\lambda_0$ , допускаемое системой (17), равно 0,015 и достигается при  $\beta=36$ . Для сравнения пунктирной линией на рис. 55 нанесено экспериментальное значение  $\lambda_0=0,0025$ . Разница в 6 раз.

Проанализируем структуру решений задачи (17). Поскольку у старших производных весьма малый коэффициент порядка  $1/R^2$ , то всюду, где  $u$  и  $v$  не имеют очень больших градиентов, т. е. вне малой окрестности стенки, с большой точностью можно считать  $f=0$ . Если в (7) пренебречь производными, то получим  $u=v$ . Это соотношение также выполняется в ядре потока, исклю-

чая близкую окрестность оси, где сказываются условия симметрии  $v(y)$  и антисимметрии  $u(y)$ . На рис. 56 это различие не отражено, поскольку оно наблюдается в очень малой окрестности точки  $y=0$ .

Значит, в рассматриваемой области  $u=v\sqrt{(2\lambda_1|y|)}$ . На рис. 56 сплошными кривыми 1, 2 показаны функции  $u(y)$  и  $v(y)$  при  $R=10^4$ ;  $\beta=37$ . Практически внутри всего интервала  $u$  и  $v$  следуют указанной зависимости. Около стенки решения весьма резко изменяются. Это особенно относится к функции  $u(y)$ , которая имеет максимум, равный 0,4 при  $y=0,99$ , а при  $y=1$  обращается в нуль. Сплошной кривой 3 изображен профиль усредненной скорости, рассчитанный с помощью уравнения Рейнольдса (15). В пристенной зоне этот профиль имеет небольшой, но резкий максимум. Для сравнения пунктирными линиями 4 и 5 нанесены парабола Пуазейля и экспериментальный турбулентный профиль, по Лауферу.

Интересно сопоставить с опытом энергетические оценки коэффициента сопротивления  $\lambda_0$  (см. рис. 72). Прямая 1 отвечает закону ламинарного трения  $\lambda_0=3/R$ , точки соответствуют экспериментальным данным. В исследованном диапазоне чисел  $R$  расчетная зависимость  $\lambda_0(R)$  хорошо аппроксимируется формулой  $\lambda_0=0,15R^{-1/4}$ , что интересно сопоставить с известной формулой Блазиуса  $\lambda_0=0,025R^{-1/4}$ .

Полученные результаты, хотя и являются грубо оценочными, интригуют своей схожестью с экспериментальными данными. Более точные оценки и, по-видимому, лучшее соответствие опыту можно было бы получить, если бы удалось сузить класс пробных полей квазипульсаций путем наложения, кроме (5), дополнительных условий стационарности (хотя бы еще одного!), но вопрос, как это сделать, остается открытым.

## Глава IV

# НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ГЕНЕРАЦИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ

В главе излагаются результаты, полученные к настоящему времени, о развитии и стационарном режиме возмущений конечной амплитуды как в точной постановке, когда рассматриваются, хотя и конечные, но малые колебания, так и в модельной, снимающей ограничение на амплитуду, но претендующей лишь на качественное или приближенное описание реальных явлений.

Точная постановка по сравнению с линейной теорией позволяет в основном определить характер возбуждения неустойчивости — мягкий или жесткий.

С помощью модельного подхода удается качественно верно описать зависимость критического числа Рейнольдса от уровня начальных возмущений и тем самым получить нижнее критическое число Рейнольдса, а также приближенно аппроксимировать развитый турбулентный режим модельными автоколебаниями с конечным числом степеней свободы.

## § 1. ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕХОД В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Линейный и энергетический анализы возмущений, проведенные в предыдущих двух главах, имеют ограниченное значение для исследования явлений перехода от ламинарного режима течения к турбулентному, поскольку дают лишь достаточные условия неустойчивости и устойчивости. Значительный разрыв между критическим числом Рейнольдса  $R_c$ , определяемым в рамках линейной теории, и величиной  $R_*$ , вычисляемой энергетическим ме-

тодом, для течений в трубах и каналах косвенно свидетельствует о наличии переходного диапазона чисел Рейнольдса, соответствующего метастабильному состоянию исходного потока. Достаточно малые возмущения, внесенные в такой поток, затухают во времени, но если начальная энергия превосходит некоторое критическое значение, то возмущения развиваются и образуется новый режим. Теоретический анализ переходных явлений превосходит по трудности задачу о собственно турбулентности; поскольку в последнем случае возможны асимптотические упрощения и чаще всего рассматривается стационарный в среднем процесс. В силу указанных трудностей проблему нелинейности, в частности расчет зависимости критического значения начальной энергии возмущений от числа Рейнольдса, решить в строгой постановке не удастся. Поэтому при анализе нелинейных возмущений прибегают к тем или иным упрощениям. За 25 лет развития нелинейной теории гидродинамической устойчивости (считая с выхода работы Мексина и Стюарта [450]) сформировались следующие три основных направления:

1) анализ ветвления стационарных решений уравнений Навье — Стокса и исследование поведения колебаний конечной амплитуды вблизи нейтральной кривой линейной теории;

2) изучение начального этапа развития возмущений с учетом некоторых нелинейных эффектов;

3) исследование устойчивости в целом на примере ограниченного класса модельных возмущений.

Более подробное описание этих направлений полезно предварить краткой справкой о современных экспериментальных данных по переходу в каналах и пограничных слоях, чтобы оценить правомерность допущений теоретического анализа и сферу применимости упрощенных моделей.

Экспериментальные исследования по переходу имеют большую историю, чем теоретические представления о характере турбулентности. Резкое изменение закона сопротивления при увеличении скорости течения, диаметра трубы или уменьшения вязкости жидкости было обнаружено еще в опытах Гагена [360, 361]. Систематически

изучать структуру переходных явлений в трубах начал Рейнольдс [503]. Сейчас существует довольно обширная литература по этому вопросу. Обзор ранних работ можно найти в монографии [163]. Особенности переходных явлений детально описаны Коулзом [293]. Подробные измерения пульсационных характеристик в переходной области проведены Вигнанским и др. [574, 575].

Диаграмма режимов течения в круглой трубе показана на рис. 57. По оси абсцисс отложено число Рейнольдса, построенное по средней скорости и диаметру трубы, по оси ординат — интенсивность возмущений  $\sqrt{\overline{v_x^2}} U_{\text{ср}} \equiv I$  на входе в трубу (обычно замеряется на оси). При числах Рейнольдса менее 2000 любое возмущение, создаваемое на входе, быстро затухает при распространении вниз по течению. В диапазоне  $2000 < R < 2700$  достаточно интенсивные возмущения не затухают, а переносятся вниз по потоку в виде изолированных завихрений (порывов). При числах Рейнольдса, близких к критическому, они практически сохраняют свою энергию и размеры на всем протяжении трубы. С ростом  $R$  области, занятые возмущениями, начинают увеличиваться в размерах, а при  $R > 2700$  происходит быстрый переход к развитой турбулентности. Если вход в трубу достаточно гладкий и уровень турбулентности на входе мал, то образование турбулентных пробок обусловлено переходными явлениями на началь-

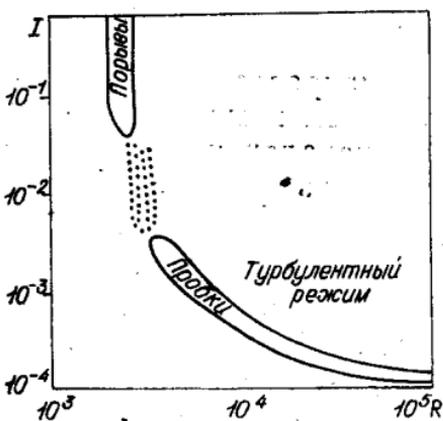


Рис. 57.

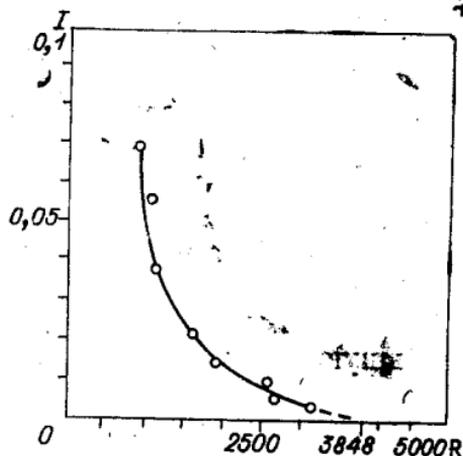


Рис. 58.

ном участке трубы. Исходная турбулентность в этом случае играет роль заправки, а характеристики сформировавшейся пробки в значительной степени не зависят от начальных возмущений. Область турбулентного «пробочного» режима заключена внутри нижней петли (см. рис. 57), причем от нижней ветви этой петли к верхней коэффициент перемежаемости, т. е. отношение размера пробки к расстоянию между передними фронтами этих пробок, возрастает от нуля до единицы. Точками на рис. 57 отмечена область смешанного режима между пробками и порывами, когда информация о характере начального возмущения частично сохраняется. У пробок и порывов различные скорости перемещения по трубе. Если порывы распространяются со скоростью, превосходящей среднюю, то скорость пробок значительно меньше средней (и уменьшается с ростом  $R$ ), а интенсивность возмущенного движения максимальна в пристенной области. На передней ветви нижней петли экспериментально наблюдаются почти синусоидальные колебания. Характерная особенность турбулентных пробок — периодичность их появления и наличие выделенных частот в спектре возмущений.

Сходная по основным чертам картина перехода наблюдается и при течении в плоских каналах. На рис. 58 представлены результаты экспериментов [410] по переходу в прямоугольном канале с отношением сторон 1:70. В указанной работе ламинарный режим доведен до числа Рейнольдса 3350 (по средней скорости и полуширине канала), что близко к теоретическому пределу 3848 по линейной теории. Отличие течения в плоском канале от течения в круглой трубе заключается в том, что ламинарный режим во входном участке более устойчив к малым возмущениям и переход к турбулентности осуществляется на участке развитого течения Пуазейля. «Естественный» характер перехода при малых интенсивностях внешней турбулентности подтверждается тем обстоятельством, что при  $R=3350$  экспериментально зафиксировано практически синусоидальное возмущение с фазовой скоростью  $X$ , равной 0,4, и волновым числом  $\alpha=0,88$ . По линейной теории, носик нейтральной кривой отвечает возмущение с  $X=0,396$ ;  $\alpha=1,02$ .

Турбулентным пробкам, возникающим вслед за потерей устойчивости, как и в круглой трубе, свойственны периодичность и наличие выделенных частот в спектре возмущений.

Переход к турбулентности в пограничных слоях заметно отличается от переходов в трубе и канале в силу неплоскопараллельности исходного режима. Эта неплоскопараллельность мало существенна при расчете профиля скорости основного течения и локальных характеристик малых возмущений. Но вследствие того, что декремент нарастания возмущений, как правило, весьма мал, характерное изменение амплитуды волны происходит на таких расстояниях, что становится заметным изменение толщины пограничного слоя, т. е. местного числа Рейнольдса. После классического исследования Шубауэра и Скремстеда [519] выполнено довольно много экспериментальных работ по переходу в пограничном слое, среди которых следует отметить статью Клебанова и др. [414], где весьма детально исследована структура переходов. Интересные результаты исследований изложены в работах [37, 58, 100, 103, 176]. Достаточно подробный обзор экспериментальных работ сделан Тани [547].

Качественную картину перехода к турбулентному режиму в пограничном слое иллюстрирует рис. 59. По оси абсцисс отложено число Рейнольдса  $R_x = U_0 x / \nu$ , где  $U_0$  — скорость набегающего потока;  $x$  — расстояние от кромки пластины, а по оси ординат — число Рейнольдса  $R_\delta = U_0 \delta / \nu$ , где  $\delta$  — толщина вытеснения. Точка А отвечает критическому значению ( $R_\delta = 520$ ), определяемому ли-

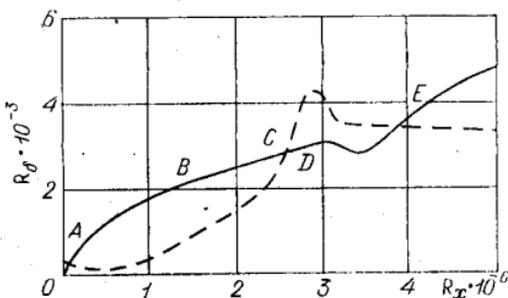


Рис. 59.

нейной теорией. Пунктирной линией показано типичное развитие малых начальных возмущений вниз по течению. На первом участке интенсивность возмущений падает. При числе Рейнольдса меньше критического это обусловлено устойчивостью течения в пограничном слое. Падение интенсивности и на некотором расстоянии за критической точкой объясняется тем, что диапазон частот, отвечающий нарастанию возмущений, сравнительно узок и увеличение энергии в этом диапазоне не компенсирует ее уменьшения на других частотах. И только, когда энергетическая доля неустойчивого диапазона частот становится доминирующей, энергия начинает нарастать, что подтверждается анализом спектра возмущений.

Амплитуда возмущений нарастает сравнительно медленно, причем декремент находится в удовлетворительном согласии с линейной теорией и на начальном участке нарастания. За точкой  $B$  амплитуда волн Толлмина — Шлихтинга становится заметной. Важно отметить, что здесь начинают проявляться трехмерные эффекты. Возмущения становятся периодическими в трансверсальном направлении и принимают вид вытянутых вдоль течения вихрей.

Между сечениями  $C$  и  $D$  наблюдается быстрый рост высокочастотных возмущений, которые инициируются в пристенном слое, где скорости волновых возмущений и основного потока близки. Области, охваченные высокочастотными осцилляциями, называют пятнами Эммонса. С увеличением размеров и смыкании этих пятен формируется развитый турбулентный режим (сечение  $E$ ).

Если в набегающем потоке существовали значительные пульсации скорости, то точки  $C$  —  $E$  сдвигаются вверх по потоку. Следует иметь в виду, что в отличие от течений в трубе и канале внешняя турбулентность в пограничном слое является не начальным возмущением, а постоянно действующим фактором, поскольку может проникать в пограничный слой на всем протяжении пластины. Более адекватному созданию начального возмущения способствует известная методика использования малого препятствия в качестве турбулизатора или колеблющихся полосок как источников волнового возмущения.

## § 2. БИФУРКАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА И ВОЗНИКНОВЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Анализ экспериментальных данных показывает, что наиболее простой объект для теоретического исследования нелинейных возмущений — течение в плоском канале. От течения в трубе его выгодно отличает наличие нейтральной кривой для бесконечно малых возмущений, что позволяет воспользоваться разложением по малому параметру в ее окрестности, а от течения в пограничном слое — однородность исходного течения по продольной координате. Кроме того, существующие экспериментальные данные по переходу в плоском канале дают основу для качественного сравнения. Наконец, исторически исследования по нелинейной устойчивости были начаты на примере течения Пуазейля.

Исчерпывающий обзор публикаций по нелинейной устойчивости параллельных течений не входит в нашу задачу, тем более что существует ряд обзорных работ [236, 328, 538, 542, 543], где приведена обширная библиография и в той или иной степени представлены все три основных направления развития нелинейной теории, упомянутые в предыдущем параграфе.

Наиболее упрощенный подход состоит в совокупном рассмотрении линеаризованных уравнений для малых возмущений и уравнения Рейнольдса. Поскольку в последнее входят квадратичные по пульсационным скоростям напряжения Рейнольдса, система в целом нелинейна, но допускает решения типа бегущей волны. (Учет нелинейных членов в уравнениях для возмущений приводит к появлению кратных гармоник, что усложняет задачу.) Такой подход был предложен Мексином и Стюартом [450]. Хотя к настоящему времени развиты более точные и строгие методы нелинейного анализа, подход Мексина — Стюарта часто используется для предварительного изучения нелинейных явлений и в работах последнего периода [95, 172, 173, 308, 330, 355, 426, 427, 436, 437]. К этому же направлению примыкает так называемая теория нелинейности критического слоя [15], в которой влияние нелинейности, обычно с точностью

до квадрата амплитуды, учитывается лишь в окрестности критической точки. Весьма интересные результаты, полученные в этом направлении Бенни и Берджероном [259], нашли дальнейшее развитие в работах Хабермана [359] и Жигулева [85].

Учет нелинейных эффектов с точностью до более высоких степеней амплитуды возмущений был предпринят Рейнольдсом и Поттером [506], а также авторами работ [235, 237, 343, 344, 478—481].

Параллельно совершенствованию нелинейных гидродинамических моделей в трудах советских и зарубежных исследователей развивалась математическая теория ветвления решений уравнений Навье—Стокса. Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемой методом Галеркина из уравнений гидродинамики, ряд результатов по бифуркации получен Брушлинской [21, 22]. Юдович развил теорию ветвления собственно уравнений Навье—Стокса, последовательно применяя метод Ляпунова—Шмидта как для задач, где реализуется принцип смены устойчивости (когда при определенном числе Рейнольдса существует собственное значение, равное нулю, и одно стационарное решение сменяется другим) [246—250], так и для общего случая [251, 252]. Работы этого направления несколько позднее появились и за рубежом [389—392, 402, 405, 516].

Не вдаваясь в математические подробности соответствующих доказательств, приведем основные положения теории ветвления решений уравнений Навье—Стокса.

1. При числах Рейнольдса, близких к критическим по линейной теории устойчивости, существуют периодические автоколебания конечной амплитуды (предельные циклы) — точные решения уравнений Навье—Стокса.

2. Предельный цикл ответвляется от стационарного решения только в точках нейтральной кривой линейной теории.

3. Предельный цикл устойчив в малом по амплитуде, если при тех же параметрах исходный режим неустойчив, и наоборот.

4. Энергия автоколебаний вблизи точки ветвления пропорциональна разности между числом Рейнольдса и его критическим значением.

5. Вторичный режим малой амплитуды может существовать либо при числах Рейнольдса, превосходящих критическое значение (мягкое возбуждение), либо при меньших числах Рейнольдса (жесткое возбуждение). Какой из этих случаев реализуется, можно определить из анализа уравнений разветвления в каждом конкретном случае.

К настоящему времени вышли работы, где приведены расчеты автоколебательных режимов для ряда конкретных течений [6—8, 91, 140—143, 154, 167, 168, 206, 222, 223, 289]. Здесь будет численно проанализирован характер ветвления решений уравнений Навье—Стокса для ряда параллельных течений и выявлено влияние формы профиля скорости для течения в пограничном слое и внешних факторов для течения Пуазейля на механизм нелинейной неустойчивости.

Рассмотрим плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в полосе  $-\infty < x < \infty$ ;  $y_1 \leq y \leq y_2$ . Уравнение для функции тока имеет вид

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} - \frac{1}{R} \Delta^2 \Psi + \Phi(\Psi) = 0, \quad (1)$$

где  $\Phi(\Psi)$  — линейный дифференциальный оператор не выше третьего порядка с постоянными коэффициентами. Он будет конкретизирован при рассмотрении частных задач. На границах области  $y = y_1$ ;  $y = y_2$  предполагается выполнение однородных краевых условий.

Пусть  $\Psi_0(y)$  — стационарное решение (1). Выпишем уравнения разветвления [8]. Автоколебательное решение разыскивается в виде

$$\Psi = \Psi_0(y) + 1/R \cdot \psi(x - Ct, y),$$

и после подстановки в (1) получается нелинейная задача на собственные значения

$$\Delta^2 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi_0}{\partial y} + R \left[ (U - C) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - U'' \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Phi(\psi) \right]; \quad U = \frac{d^2 \Psi_0}{dy^2}. \quad (2)$$

Если амплитуда автоколебаний сколь угодно мала, то

собственные значения соответствуют нейтральной кривой линейной теории, а функция тока имеет вид  $\psi_1 = A \{ \varphi(y) \exp [i\alpha(x - Ct)] + \varphi^*(y) \exp [-i\alpha(x - Ct)] \}$ , (3) где  $\varphi(y)$  — собственная функция уравнения Орра — Зоммерфельда

$$L_\alpha \varphi = \varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi - i\alpha R_0 [(U - C_0) (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi] - R_0 \Phi_1(\varphi). \quad (4)$$

Число Рейнольдса  $R_0$  и волновое число  $\alpha$  отвечают какой-либо точке нейтральной кривой, а  $\Phi_1(\varphi)$  — Фурье-образ оператора  $\Phi$ . Непосредственно на нейтральной кривой амплитуда автоколебаний равна нулю. Рассмотрим малую окрестность нейтральной точки

$$R = R_0 + f\varepsilon^2; \quad f = \pm 1 \quad (5)$$

и будем искать решение в виде ряда по малому параметру  $\varepsilon$

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k; \quad RC = R_0 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k C_k. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (2) получим рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} & \Delta^2 \psi_k - R_0 \left[ (U - C_0) \frac{\partial \Delta \psi_k}{\partial x} - U'' \frac{\partial \psi_k}{\partial x} + \Phi(\psi_k) \right] = \\ & = \left[ U \frac{\partial \Delta \psi_{k-2}}{\partial x} - U'' \frac{\partial \psi_{k-2}}{\partial x} + \Phi(\psi_{k-2}) \right] f + \sum_{j=1}^{k-1} \left[ \left( \frac{\partial \psi_{k-j}}{\partial y} - \right. \right. \\ & \left. \left. - R_0 C_{k-j} \right) \frac{\partial \Delta \psi_j}{\partial x} - \frac{\partial \psi_{k-j}}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi_j}{\partial y} \right] \equiv f_k. \quad (7) \end{aligned}$$

Для каждой функции  $\psi_k$  имеем линейную краевую задачу. При  $k=1$  получаем уравнение для малых возмущений, которое после Фурье-преобразования принимает форму (4). Пусть при вариации числа Рейнольдса (5) значение числа  $\alpha$  сохраняется. Тогда получим автоколебания с пространственным периодом в продольном направлении, равным  $2\pi/\alpha$ , поскольку все правые части в системе (7) представляют суммы кратных гармоник. При  $k=1$  реше-

ние  $\psi_1$  имеет форму (3). Собственная функция  $\varphi(y)$  предполагается нормированной каким-либо образом, например  $\varphi(0) = 1$ . Амплитудный множитель  $A$ , выделенный для удобства, подлежит определению. Правая часть  $f_k$  обращается в нуль лишь при  $k=1$ . При  $k=2$  она имеет вид:

$$f_2 = i\alpha A^2 \cdot (\varphi^* \varphi' - \varphi \varphi'^*)'' - R_0 C_1 \Delta \psi_1 + 2A^2 \operatorname{Re} \{ i\alpha (\varphi'^2 - \varphi \varphi'')' \exp [2i\alpha (x - Ct)] \}. \quad (8)$$

Таким образом, решение  $\psi_2$  следует разыскивать в виде суперпозиции нулевой и первых двух гармоник. Но в случае первой гармоники мы находимся на спектре линейного оператора, и, чтобы неоднородная задача была разрешима, должно быть выполнено условие

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_0^{2\pi/\alpha} f_k e^{-i\alpha(x - Ct)} \theta(y) dx = 0, \quad (9)$$

где  $\theta(y)$  — собственная функция сопряженного уравнения Орра — Зоммерфельда

$$\theta^{IV} - 2\alpha^2 \theta'' + \alpha^4 \theta - i\alpha R_0 [(U - C_0) (\theta'' - \alpha^2 \theta) + 2U' \theta'] - R_0 \chi_1(\theta) = 0 \quad (9a)$$

( $\chi_1$  — оператор, сопряженный с  $\Phi_1$ ). Из (8) и (9) получим

$$R_0 C_1 A J_1 = 0,$$

где

$$J_1 = \int_{y_1}^{y_2} \theta (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) dy. \quad (10)$$

В силу предполагаемой полноты системы собственных функций и простоты собственных значений интеграл  $J_1 \neq 0$ . Отсюда следует  $C_1 = 0$ . Нетрудно, действуя аналогичным образом, получить  $C_{2n \pm 1} = 0$  для всех целых  $n$ .

Таким образом, общий вид решения  $\psi_2$  таков:

$$\psi_2 = A^2 \{ V_0(y) + V_1(y) \exp [2i\alpha (x - C_0 t)] + V_1^* \exp [-2i\alpha (x - C_0 t)] \}. \quad (11)$$

Уравнения  $V_0$  и  $V_1$  получим, подставляя (11) в (7) с учетом (8):

$$\begin{aligned} V_0^{IV} &= i\alpha(\varphi^*\varphi' - \varphi\varphi'^*)'' - R_0\Phi(V_0); \\ L_{2\alpha}V_1 &= i\alpha(\varphi'^* - \varphi\varphi'')'. \end{aligned} \quad (12)$$

Граничные условия для  $V_0$  и  $V_1$  такие же, как для  $\varphi(y)$ . Интегрирование неоднородных линейных уравнений возможно, так как параметры  $C_0$ ,  $2\alpha$ ,  $R_0$ , вообще говоря, не являются спектральными. Таким образом,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  определены с точностью до амплитудного множителя  $A$ . Его величину, как и  $C_2$ , найдем из условия разрешимости (9) при  $k=3$ . Правая часть  $f_3$  имеет вид

$$\begin{aligned} f_3 = f &\left[ U \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} - U'' \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \Phi(\psi) \right] + A^2 \left( V_0' \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} - \right. \\ &- V_0''' \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \left. \right) + \operatorname{Re} \left\{ \left[ -V_1'(\varphi'' - \alpha^2\varphi)^* - 2V_1(\varphi''' - \alpha^2\varphi')^* + \right. \right. \\ &+ 2\varphi^*(V_1'' - 4\alpha^2V_1) + \varphi^*(V_1'' - 4\alpha^2V_1)' \left. \right] A^3 i\alpha \exp[i\alpha(x - \\ &- Ct)] \left. \right\} + \operatorname{Re} \{ K_3 \exp[3i\alpha(x - Ct)] \} - R_0 C_2 \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x}. \quad (13) \end{aligned}$$

Следовательно, решение  $\psi_3$  представляет собой суперпозицию из первой и третьей гармоник (коэффициент  $K_3$  при трехкратной экспоненте не конкретизирован для краткости). Требование разрешимости дает

$$-C_2 R_0 J_1 + A^2 J_2 + f J_3 = 0;$$

$$\begin{aligned} J_2 = \int_{y_1}^{y_2} &\left[ V_0'(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - V_1'(\varphi'' - \alpha^2\varphi)^* - 2V_1(\varphi''' - \right. \\ &- \alpha^2\varphi')^* + 2\varphi^*(V_1'' - 4\alpha^2V_1) + \varphi^*(V_1'' - 4\alpha^2V_1)' \left. \right] \theta dy; \quad (14) \end{aligned}$$

$$J_3 = \int_{y_1}^{y_2} [U(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi - i/\alpha \cdot \Phi_1(\varphi)] \theta dy.$$

Интегралы  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  комплекснозначны, и формула (14) представляет собой систему двух уравнений для определения вещественных неизвестных  $C_2 R_0$  и  $A^2$ . Поскольку множитель  $f$  стоит при векторе правых частей, с его помощью можно управлять знаком решения; при этом

необходимо, чтобы  $A^2 > 0$  в соответствии с физическим смыслом. Если  $f > 0$ , то малые автоколебания существуют только при числах Рейнольдса, превосходящих критические (такой случай обычно называют закритическим). При  $f < 0$  автоколебания малой амплитуды наблюдаются лишь при меньших числах Рейнольдса (докритический случай). Так как неустойчивость к бесконечно малым возмущениям впервые проявляется при числе Рейнольдса, отвечающему носике нейтральной кривой, именно этот случай наиболее интересен.

Удовлетворив условия разрешимости, определим компоненту решения  $\psi_3$ , отвечающую первой гармонике, с точностью до вещественной постоянной  $A_3$ . Ее величина определяется из условий разрешимости при  $k=5$  и т. д.

Устойчивость полученных автоколебательных решений вблизи точки ветвления анализируется также при помощи разложения по малому параметру. Полагая, что спектр малых возмущений есть аналитическая функция  $\epsilon$ , можно заключить, что все возмущения, затухающие при  $\epsilon=0$  и обладающие достаточным запасом устойчивости, будут затухать и при малом  $\epsilon \neq 0$ . Аналогичное заключение можно сделать и для нарастающих при  $\epsilon=0$  возмущений. В этом смысле все автоколебания, ответвляющиеся от нейтральной кривой далеко от ее носика, неустойчивы.

Особый случай — ветвление на носике нейтральной кривой. Спектральная задача для малых возмущений  $\chi(x-Ct, y)$  какого-либо решения (1) имеет вид (оператор  $\Phi$  не меняет общности результата и для краткости опускается):

$$-\sigma \frac{\partial \Delta \chi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \chi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} - \\ - \frac{1}{R} \Delta^2 \chi = 0. \quad (15)$$

Пусть  $\sigma_0, \alpha, R_0$  — параметры носика нейтральной кривой стационарного течения. Проанализируем устойчивость при  $R = R_0 + f\epsilon^2$ , а спектральную задачу решим в виде ряда  $R\sigma = R_0 \sum_{h=0}^{\infty} \epsilon^h \sigma_h$ ;  $\chi = \sum_{h=0}^{\infty} \epsilon^h \chi_h$ . При данном  $R$  авто-

колебательное решение имеет вид  $\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Psi_k$ . Подставив эти ряды в (15) и собирая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим при  $k=0$  уравнение для малых возмущений стационарного режима. Спектр этой задачи  $\sigma^0(\gamma) = \sigma_r^0(\gamma) + i\sigma_i^0(\gamma)$  при  $R=R_0$  зависит от волнового числа возмущений  $\gamma$ , и при  $\gamma=\alpha$   $\sigma=\sigma_0$ . При  $k=1$  имеем

$$L(\chi_1) - R_0 \sigma_1 \frac{\partial \Delta \chi_0}{\partial x} + M(\chi_0, \Psi_1) = 0;$$

$$M(\chi_0, \Psi_1) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \frac{\partial \Delta \chi_0}{\partial x} + \frac{\partial \chi_0}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \frac{\partial \Delta \chi_0}{\partial y} - \frac{\partial \chi_0}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi_1}{\partial y}.$$

Величина  $\sigma_1$  определяется из условия разрешимости (9), где  $\alpha$  следует заменить на  $\gamma$ , а  $f_k$  — на  $M(\chi_0, \Psi_1)$ . Наиболее интересен случай, когда  $\gamma$  и волновое число автоколебаний  $\alpha$  близки, так как остальные возмущения, будучи затухающими при  $\varepsilon=0$ , будут затухать и при малых  $\varepsilon$ . Поскольку  $\chi_0$  — колебание с волновым числом  $\gamma$ , а  $M(\chi_0, \Psi_1)$  колеблется с волновым числом  $\alpha \pm \gamma \neq \gamma$ , то из условия ортогональности следует  $\sigma_1=0$ . При этом  $\chi_1$  будет суммой гармонических возмущений с волновыми числами  $\alpha+\gamma$  и  $\alpha-\gamma$ . Таким образом, для определения устойчивости необходимо рассмотреть следующие члены разложения ( $k=2$ ), которые удовлетворяют уравнению

$$L(\chi_2) - R_0 \sigma_2 \frac{\partial \Delta \chi_0}{\partial x} + M(\chi_1, \Psi_1) + M(\chi_0, \Psi_2) + f \left( U \frac{\partial \Delta \chi_0}{\partial x} - U'' \frac{\partial \chi_0}{\partial x} \right) = 0. \quad (16)$$

Из требования разрешимости получим

$$-R_0 \sigma_2 J_1 + (J_4 + J_2) A^2 + f J_3 = 0, \quad (17)$$

где интегралы  $J_1, J_2, J_3$  определены формулами (10) и (14) с заменой  $\alpha$  на  $\gamma$ , а

$$J_4 = \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{2\pi/\gamma} M(\chi_1, \Psi_1) \theta \exp[-i\gamma(x - \sigma_0 t)] dx dy.$$

Если волновые числа возмущения и основного автоколебательного течения совпадают, то из (17) и (14), имея в виду  $J_4 = 2J_2$ , получим

$$\text{Im } \sigma_2 = -2f/R_0 \cdot \text{Im } (J_3/J_1).$$

С другой стороны, при  $A=0$  из (17) следует  $\sigma_{20} = f/R_0 \cdot J_3/J_1$ , следовательно,

$$\text{Im } \sigma_2 = -2 \text{Im } \sigma_{20}.$$

Это означает, что если исходный плоскопараллельный режим становится неустойчивым при изменении  $R$ , то автоколебания будут устойчивы к возмущениям амплитуды. Из соображений непрерывности следует ожидать, что и возмущения с  $\gamma$ , достаточно близкими к  $\alpha$ , также будут затухать. Более подробные результаты можно получить, проводя разложение в ряд по параметру  $\gamma - \alpha$ .

Итак, автоколебательный режим, ответвляющийся от стационарного решения, может быть устойчивым и, следовательно, принципиально реализуемым лишь в том случае, если при числе Рейнольдса, отвечающем носике нейтральной кривой, ветвление происходит в сторону больших чисел Рейнольдса, т. е. имеет место мягкое возбуждение. Расчеты [8, 289] показали, что для течения Пуазейля типично жесткое возбуждение, и, следовательно, все ответвляющиеся автоколебания неустойчивы. Эту ситуацию, как оказалось, можно изменить наложением продольного магнитного поля.

### § 3. ОТВЕТВЛЕНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО РЕЖИМА ОТ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Продольное магнитное поле не взаимодействует с исходным плоскопараллельным режимом, и профиль скорости остается параболическим, т. е.

$$U = 1 - y^2; \quad -1 \leq y \leq 1. \quad (1)$$

Предполагая магнитное число Рейнольдса малым, а течение двумерным, получим (см. главу II) уравнение дви-

жения в терминах функции тока

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} - \frac{1}{R} \Delta^2 \Psi + \frac{Ha^2}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Гидродинамическая часть задачи полностью автономна, влияние поля сказывается на движении только посредством последнего члена (2) и зависит от напряженности магнитного поля, характеризуемой числом Гармана  $Ha$ .

Анализ ветвления проводится по методике, изложенной в предыдущем параграфе. Операторы  $\Phi$  и  $\chi$  принимают при этом конкретную форму:

$$\Phi(\Psi) = \frac{Ha^2}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}; \quad \Phi_1(\varphi) = \chi_1(\varphi) = -\frac{Ha^2}{R} \alpha^2 \varphi.$$

Специальный вид этих операторов свидетельствует о том, что поле непосредственно взаимодействует только с теми слагаемыми функции тока, которые зависят от  $x$ . Поэтому в (2.12) член  $\Phi(V_0) = 0$ .

Расчеты проводились методом дифференциальной прогонки со стыковкой в критической точке  $y_c$ . Интегрирование осуществлялось на интервале  $0 \leq y \leq 1$  с учетом условий симметрии на оси. Для функций  $\varphi(y)$  и  $\theta(y)$  формулировались условия симметрии по  $y$  в соответствии с результатами линейной теории, а для  $V_0(y)$  и  $V_1(y)$  — условия антисимметрии в силу (2.12). Отметим, что хотя функция  $\Psi(x - Ct, y)$  никакой симметрией относительно оси  $y=0$  не обладает, ее средние значения по времени (или продольной координате) антисимметричны.

Характер ветвления автоколебаний в зависимости от числа  $Ha$  иллюстрирует рис. 60. Линией 1 нанесена нейтральная кривая при  $Ha=0$ . Этот случай рассматривается как контрольный, результаты согласуются с данными работ [8, 289]. Стрелками указано направление ветвления автоколебаний. Размеры стрелок качественно соответствуют величине

$$\begin{aligned} dE/dR &= A^2 f \int_0^1 (|\varphi'|^2 + \alpha^2 |\varphi|^2) dy; \\ E &= 1/2 \int_0^1 dy \int_0^{2\pi/\alpha} v_k^2 dx. \end{aligned} \quad (3)$$

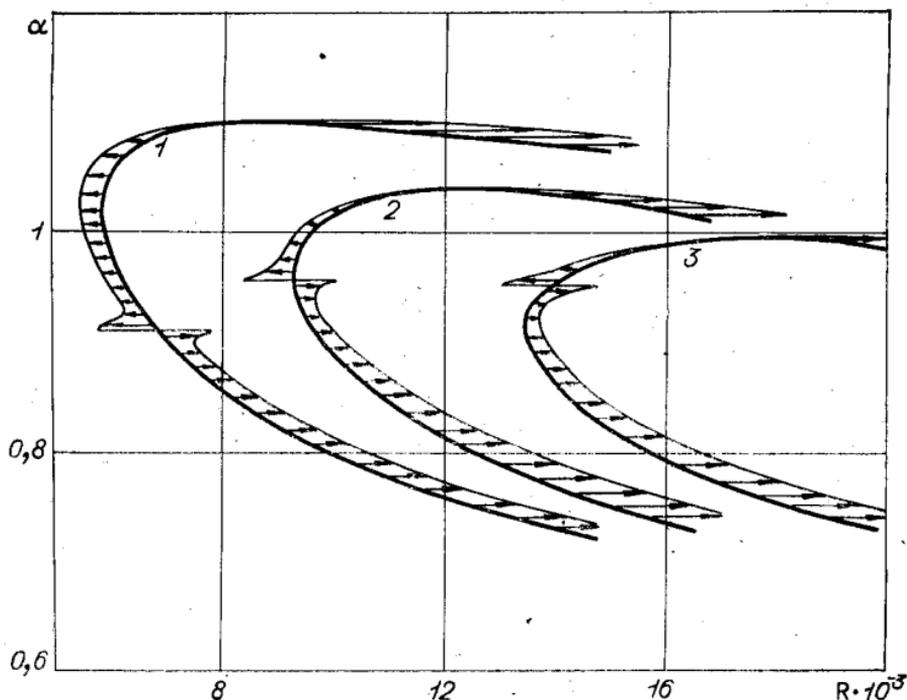


Рис. 60.

При  $R > 6800$  на нижней ветви нейтральной кривой автоколебания существуют при числах Рейнольдса, превосходящих нейтральные значения, они устойчивы по отношению к вариации амплитуды, но неустойчивы к другим возмущениям. При  $\alpha = 0,91$ ;  $R = 6800$  сменяются направления ветвления автоколебаний. Величина  $dE/dR$  при этом меняет знак, проходя через бесконечно большое значение. Наиболее важно то, что в точке, отвечающей носу нейтральной кривой ( $\alpha = 1,02$ ;  $R_c = 5772$ ), ветвление происходит в докритическую область и автоколебания неустойчивы при вариации амплитуды. Это значит, что при амплитуде меньше стационарной автоколебания будут затухать, а при амплитуде, превышающей стационарную, будет наблюдаться рост энергии и, вообще говоря, переход к новому режиму. Таким образом, в параллельном течении осуществляется жесткий режим возбуждения неустойчивости и скачкообразный пере-

ход к новому, вероятнее всего турбулентному, состоянию.

При  $\alpha = 1,1$ ;  $R = 8700$  на «макушке» нейтральной кривой  $dE/dR$  снова меняет знак, проходя на этот раз через нуль. Это, однако, связано не с качественным изменением поведения автоколебаний, а с тем обстоятельством, что область устойчивости исходного течения лежит уже справа от нейтральной кривой. Автоколебательный режим по-прежнему докритичен и неустойчив.

На рис. 61 изображен профиль скорости  $U(y)$  и стационарная добавка к нему  $V'_0$ , обусловленная автоколебаниями и рассчитанная при критических значениях параметров ( $\alpha_* = 1,02$ ). Мы видим, что искажение профиля скорости предвещает появление точек перегиба при достаточно большом значении амплитуды  $A$ , что может стать причиной развития новых неустойчивостей.

С увеличением числа Гартмана характер ветвления автоколебаний меняется. На рис. 60 кривые 2 и 3 отвечают значениям  $Na = 15,4$  и  $Na = 24,3$ . Точка смены направления ветвления перемещается с нижней ветви нейтральной кривой на верхнюю. Для кривой 2 эта точка практически совпадает с носиком нейтральной кривой  $\alpha_* = 0,96$ ;  $R_* = 9240$ . Для кривой 3 критическими параметрами являются  $\alpha_* = 0,91$ ;  $R_* = 13400$ , а точка смены расположена при  $\alpha_* = 0,95$ ;  $R_* = 13800$ . Таким образом, в диапазоне  $13400 < R < 13800$  существует устойчивый автоколебательный режим в закритической области, который может наблюдаться экспериментально. Такие эксперименты интересны для анализа области применимости и содержательности развиваемой теории.

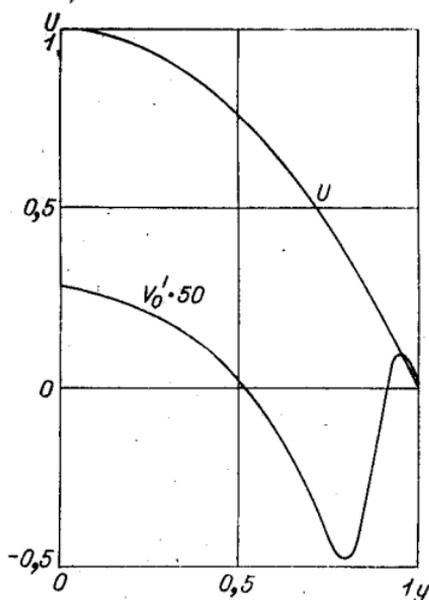


Рис. 61.

При  $Na=24,3$  в отличие от рис. 61 добавка к профилю скорости наиболее значительна в пристенной зоне, при этом она имеет положительный знак. В ядре течения добавочная скорость уменьшает исходную. Эти изменения приводят к «уплощению» кривой  $U(y)$ , т. е. деформируют ее в направлении к турбулентному профилю усредненной скорости. Но наличие точек перегиба у  $V_0$  свидетельствует о возможной неустойчивости с ростом амплитуды автоколебаний и вероятности нового ветвления.

Носит ли потеря устойчивости мягкий или жесткий характер, определяется величиной  $\partial E/\partial R$  на носике нейтральной кривой. Зависимость обратной величины  $\partial R/\partial E$  от критерия Гартмана показана на рис. 62. Переход от жесткого возбуждения к мягкому происходит при числе  $Na=15,5$ . С ростом  $Na$  величина  $\partial R/\partial E$  стабилизируется. Наибольший интерес представляет диапазон  $0 \leq Na \leq 25$ , поскольку при  $Na > 25$  наиболее опасным, согласно линейной теории (см. главу II), становятся трехмерные возмущения и анализ ветвления двумерных автоколебаний в значительной степени теряет свою ценность.

Наблюдение устойчивых автоколебаний в канале даже при наличии продольного поля остается проблематичным. Но колебательный режим, а именно волны Толлми-

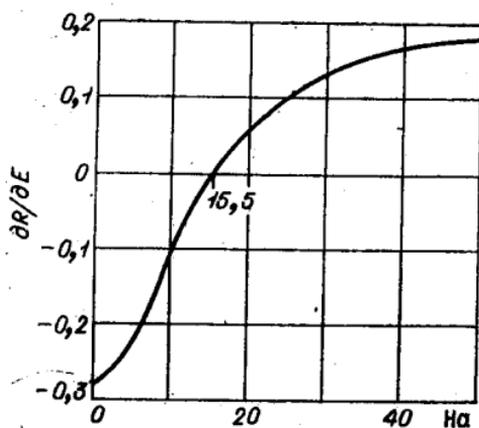


Рис. 62.

на — Шлихтинга, часто наблюдается и сравнительно хорошо изучен при течениях в пограничном слое. Поэтому интересно проанализировать ветвление автоколебаний в этом случае.

#### § 4. ВОЗНИКНОВЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Анализ течения в пограничном слое имеет некоторые особенности. Первая связана с непараллельностью течения. Учет непараллельности привел бы к усложнению задачи, поэтому мы ограничимся плоскопараллельным приближением, как это делается обычно при анализе устойчивости. Поскольку эволюция возмущений не рассматривается, можно ожидать, что локальный подход приведет к верным, по крайней мере качественно, результатам. Второй особенностью течения в пограничном слое является неограниченность области течения в поперечном направлении. В силу невозможности численного анализа на бесконечном интервале приходится его искусственно ограничивать и выбирать адекватные крайние условия на внешней границе. Как правило, расчеты проводились на интервале, в 5 раз превосходящем толщину вытеснения. Выборочные проверки показали, что дальнейшее увеличение интервала практически не меняет результатов.

Рассмотрим течение около клина. Скорость потенциального течения у поверхности клина пропорциональна степени расстояния от вершины:

$$U_{\infty} = Bx^m.$$

В этом случае уравнения пограничного слоя для вязкой несжимаемой жидкости допускают автомодельные решения для функции тока:

$$\Phi(x, y) = \sqrt{[vx/(m+1)]U_{\infty}} \Psi_0(\eta); \quad \eta = y\sqrt{[(m+1)/vx]U_{\infty}}.$$

Форм-параметром профиля скорости здесь служит показатель  $m = x/U_{\infty} \cdot dU_{\infty}/dx$ , однозначно связанный с углом

раствора клина. Значения  $m > 0$  отвечают положительному углу раствора клина (течение в конфузоре), градиент давления в продольном направлении отрицателен. Значения  $m < 0$  отвечают течению в диффузоре и соответствуют положительному градиенту давления. Отрыв пограничного слоя происходит при  $m = -0,0904$ .

Функция  $\Psi_0(\eta)$  удовлетворяет уравнению Фокнера — Скэн

$$2\Psi_0''' + \Psi_0\Psi_0'' + 2m/(m+1) \cdot (1 - \Psi^2) = 0; \quad (1)$$

$$\Psi_0 = \Psi_0' = 0 \text{ при } \eta = 0; \quad \Psi_0' = 1 \text{ при } \eta = \infty.$$

В качестве масштаба скорости здесь выбрано ее значение на внешней границе пограничного слоя  $U_\infty$ . Скорость  $U(\eta)$  определяется соотношением  $U(\eta) = \Psi_0'(\eta)$ . Для каждого числа Рейнольдса, определяемого как

$$R = U_\infty \delta_* / \nu, \text{ где } \delta_* = \sqrt{[\nu x / (m+1)]} U_\infty \int_0^1 (1 - U) d\eta -$$

толщина вытеснения, течение аппроксимируется одномерным параллельным потоком. Поперечной скоростью в основном течении пренебрегаем. В рамках этого приближения функция тока удовлетворяет уравнению (2.1), причем  $\Phi(\Psi) = 0$ .

Чтобы не вводить переобозначений, здесь и далее под  $y$  подразумевается отношение поперечной координаты к толщине вытеснения.

Следует остановиться особо на вопросе о граничных условиях. На стенке при  $y=0$ , как обычно, ставятся условия прилипания  $\psi = \psi' = 0$ . Остальные два крайних условия выбираются из требования минимального роста  $\psi$  на бесконечности. Из дальнейшего будет видно, что требование ограниченности  $\psi$  на бесконечности выполнить не удастся.

Как следует из § 2 данной главы, анализ ветвления сводится к интегрированию двух однородных и одного неоднородного уравнения Орра-Зоммерфельда и первого уравнения (2.12). Для уравнений типа Орра-Зоммерфельда граничные условия формулируются, как в § 6 гл. II [см. (II.6.5)].

Для сопряженного уравнения (2.9а) и второго уравнения (2.12) граничные условия также принимались в виде (II.6.5), причем в последнем случае следует заметить  $\alpha$  на  $2\alpha$ . Интегрирование первого уравнения (2.12) имеет свою специфику. Общий вид однородного решения ( $\Phi(V_0) \equiv 0$ ) таков:

$$V_0 = C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3,$$

т. е. затухающего на бесконечности решения не существует. При этих обстоятельствах приходится довольствоваться требованием наименьшего роста:  $C_2 = C_3 = 0$ . Тогда после двукратного интегрирования приходим к задаче Коши

$$V_0' = i\alpha(\varphi^* \varphi' - \varphi \varphi'^*); \quad V_0 = V_0' = 0 \text{ при } y = 0. \quad (2)$$

Хотя правая часть (2) экспоненциально убывает при  $y \rightarrow \infty$ , решение уравнения линейно растет. Однако функция тока для исходного течения  $\Psi_0$  также линейно увеличивается при больших  $y$ , поэтому при достаточно малой амплитуде автоколебаний отношение  $V_0$  к  $\psi_0$  будет малым, так что линейный рост  $V_0$  не вступает в противоречие с методом разложения по малому параметру. Несмотря на рост функции  $V_0$  на бесконечности, скорости возмущенного движения, будучи производными от  $\psi$ , остаются конечными, а их пульсирующие составляющие экспоненциально затухают. Это, в частности, приводит к тому, что интегралы  $J_1, J_2, J_3$ , которые следует вычислять на бесконечном интервале, быстро сходятся, и хорошая точность достигается уже при интегрировании до  $y_1 = 5$ .

Толщина вытеснения, служащая масштабом длины, зависит от величины  $m$ . Основное течение сначала рассчитывалось интегрированием уравнения (1) на достаточно большом расстоянии, затем вычислялась величина  $\delta$ , и пересчитывались профиль  $U(y)$  и его производные, соответствующие переходу от  $\eta$  к  $y$ .

Нейтральные кривые и направления ветвления автоколебаний для течения Блазиуса показаны на рис. 63 (1— $m=0$ ; 2— $m=0,0192$ ). В случае течения Блазиуса точка смены направления ветвления ( $\alpha=0,31$ ) лежит не-

сколько выше критической точки ( $\alpha_* = 0,304$ ;  $R_* = 519$ ) и, следовательно, возбуждение автоколебаний мягкое. Собственная функция  $\varphi(y)$  и решение сопряженного уравнения Орра-Зоммерфельда  $\theta(y)$ , отвечающие критическим параметрам, изображены на рис. 64 и 65. Нормировка решений при расчетах проводилась так, чтобы  $\varphi(y_c) = 1$  и  $\theta(y_c) = 1$ . Амплитуда  $V_1$  двукратной гармоники и добавочная средняя скорость  $V_0$  показаны на рис. 66 и 67. Следует отметить, что  $V_0$  выходит на постоянное конечное значение при  $y \rightarrow \infty$ . Кажется несколько странным, что автоколебания, локализованные в пограничном слое, деформируют профиль скорости как угодно далеко. Это — дефект принятого здесь плоскопараллельного приближения. Как будет показано ниже, дефект отсутствует, если пограничный слой, действительно, плоскопараллелен, что достигается равномерным отсосом или наложением поперечного магнитного поля. Учет поперечной компоненты скорости основного течения не может устранить дефекта, если скорость направлена от стенки к потенциальному потоку.

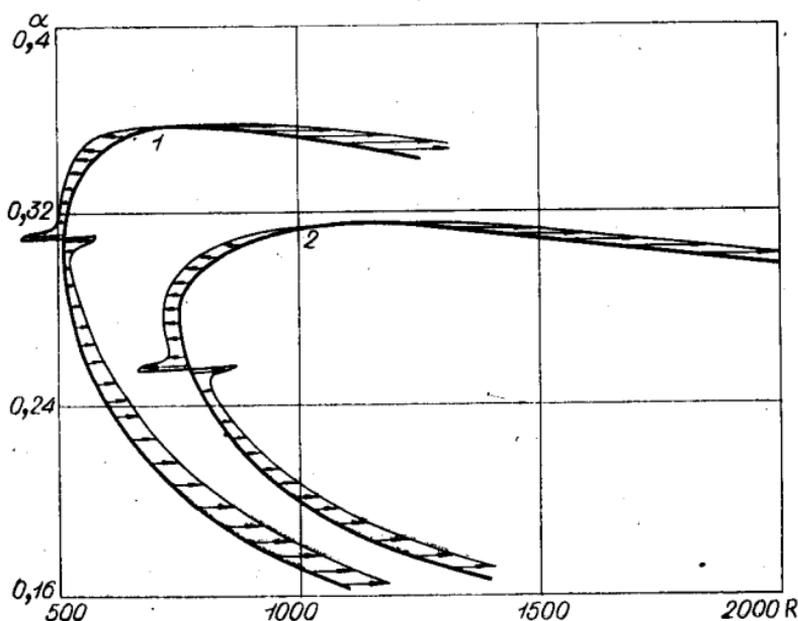


Рис. 63.

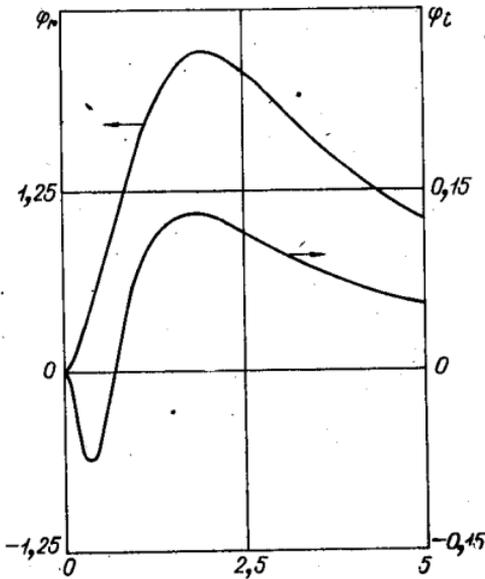


Рис. 64.

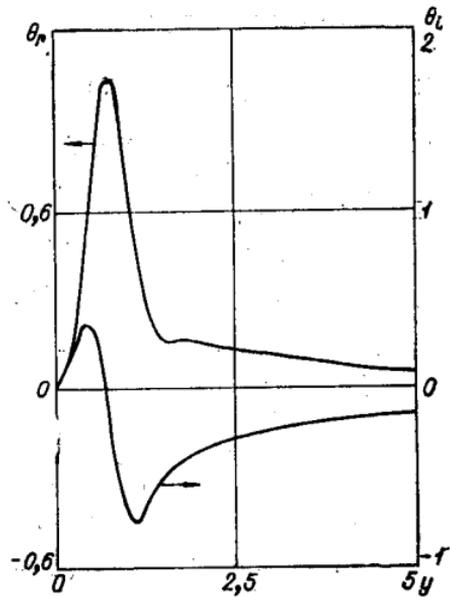


Рис. 65.

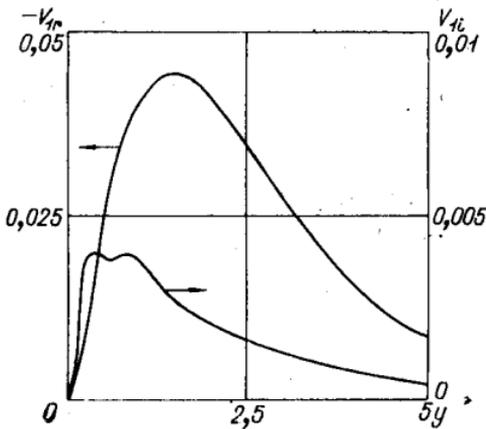


Рис. 66.

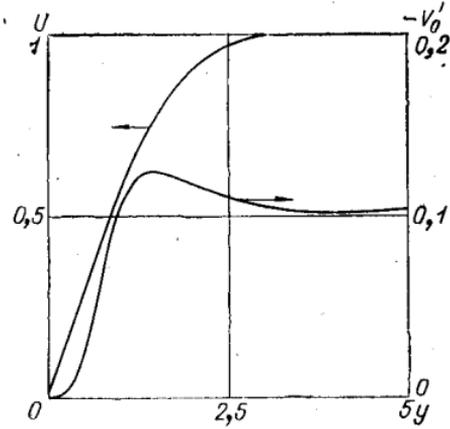


Рис. 67.

Наличие отрицательного градиента давления (см. рис. 63) приводит к жесткому возбуждению неустойчивости, хотя и увеличивает критическое число Рейнольдса. Эта ситуация противоположна рассмотренному в предыдущем параграфе случаю с продольным магнит-

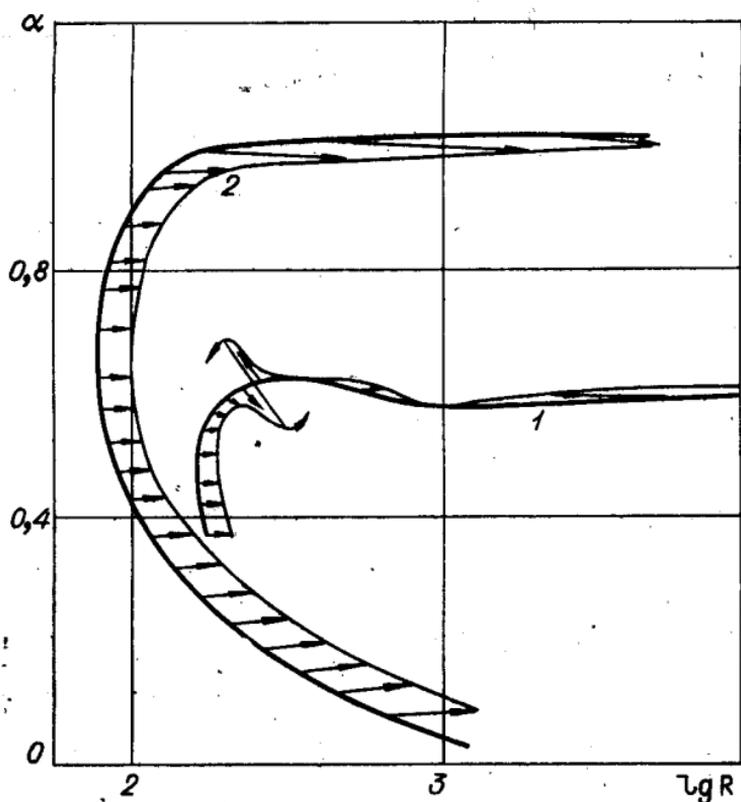


Рис. 68.

ным полем. Отличие заключается в том, что магнитное поле, оказывая стабилизирующее воздействие на возмущения, не меняет профиля скорости основного течения, в то время как наложение градиента давления проявляется лишь через деформацию исходного течения. Таким образом, мы имеем возможность проанализировать влияние формы профиля скорости на характер ветвления в чистом виде.

Случай положительных градиентов давления иллюстрирует рис. 68 ( $1 - m = -0,0602$ ;  $2 - m = -0,0882$ ). С уменьшением  $m$  течение дестабилизируется, на профиле скорости появляются точки перегиба, что отражается на характере нейтральной кривой — вдоль ее верхней ветви при  $R \rightarrow \infty$  волновое число  $\alpha$  стремится уже не к нулю, а к конечному предельному значению.

Точка смены режима ветвления смещается вдоль верхней ветви к «макушке» нейтральной кривой и исчезает, когда точка, отвечающая  $\alpha_{\max}$ , уходит на бесконечность. Кривая 2 соответствует именно такому случаю течения вблизи точки отрыва, когда нейтральная кривая не имеет вершины при конечных значениях  $R$ . Автоколебания от всех точек нейтральной кривой ответвляются в область неустойчивости исходного режима, т. е. возбуждаются мягко. Хотя возникающие автоколебания устойчивы вблизи носика нейтральной кривой, характер деформации профиля скорости указывает на возможность появления новых неустойчивостей с ростом амплитуды.

Производная  $\partial R/\partial E$  на носике нейтральной кривой в зависимости от величины  $m$  нанесена на рис. 69 вместе с зависимостью  $R_*(m)$ . Характерные параметры ветвления для ряда точек этой кривой суммированы в табл. 6.

То, что с ростом  $m$  увеличивается  $R_*$ , но уменьшается величина  $\partial R/\partial E$ , косвенно свидетельствует о том, что нелинейное критическое число Рейнольдса более консервативно, т. е. слабее меняется с деформацией профиля, чем  $R_*$  линейной теории.

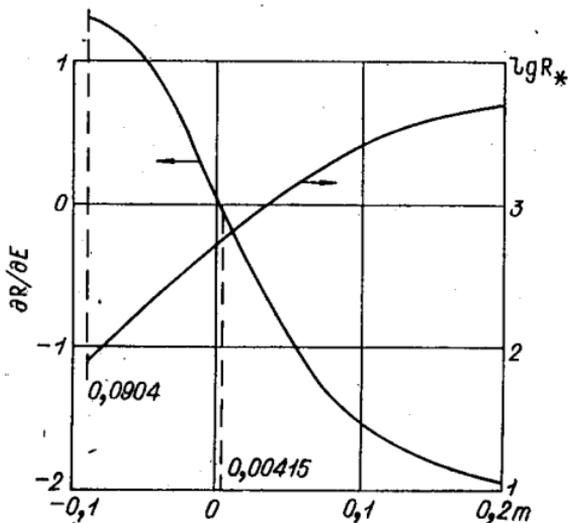


Рис. 69.

Таблица 6

## Параметры ветвления для семейства Фокнера-Скэн

$m$	$\nu_c$	$C_0$	$\alpha_*$	$R_*$	$C_2 R_0$	$A^*$	$dR/dE$	$f$
0,2768	0,34	0,2375	0,1737	6681	-0,182	0,0823	-2,024	-1
0,1420	0,40	0,2704	0,1899	3658	-0,207	0,1109	-1,745	-1
0,0602	0,52	0,3236	0,2270	1539	-0,239	0,2501	-1,089	-1
0,0192	0,62	0,3738	0,2722	759	-0,199	0,9902	-0,338	-1
0,0074	0,66	0,3866	0,2908	602	+0,206	4,866	-0,075	-1
0	0,68	0,3967	0,3040	519	0,779	4,068	0,092	+1
-0,0074	0,72	0,4068	0,3184	447	0,508	1,614	0,2564	+1
-0,0192	0,74	0,4220	0,3442	351	0,444	0,8180	0,5040	+1
-0,0340	0,80	0,4412	0,3820	260	0,431	0,5930	0,7762	+1
-0,0602	0,88	0,4678	0,4700	154	0,429	0,4537	1,122	+1
-0,0882	0,94	0,4747	0,6617	78,4	0,389	0,4124	1,270	+1

Полученный результат относительно того, что при малых критических числах Рейнольдса потеря устойчивости носит мягкий характер и развивается устойчивый колебательный режим, согласуется с данными об обтекании плохо обтекаемых тел. Колебания в кормовой части пограничного слоя и в следе за телом предшествуют возникновению дорожки Кармана и развитию турбулентности. Развитие вторичного устойчивого режима, как правило, наблюдается также при возникновении конвекции и тейлоровских вихрей между цилиндрами.

Значение интегральных результатов (см. рис. 69) несколько ослабляется огрублением, вносимым плоскопараллельной идеализацией. Можно надеяться, однако, что более строгая постановка приведет лишь к некоторой коррекции численных результатов, но не изменит картины качественно. В течениях типа пограничного слоя известны два плоскопараллельных режима — асимптотический пограничный слой с равномерным отсосом и гартмановский пограничный слой в поперечном поле. Ветвление автоколебаний для этих случаев было рассчитано Лихачевым [140, 141].

Для того и другого режима профиль скорости при выборе толщины вытеснения в качестве масштаба длины имеет вид

$$U = 1 - \exp(-y). \quad (3)$$

В случае отсоса наличие поперечной скорости приводит к появлению оператора [см. (2.1)]

$$\Phi(\Psi) = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y}; \quad \chi_1(\varphi) = -\Phi_1(\varphi) = \frac{1}{R} (\varphi'' - \alpha^2 \varphi)',$$

а уравнение для  $V_0$  принимает форму

$$V_0^{IV} + V_0''' = i\alpha (\varphi^* \varphi' - \varphi \varphi^*').$$

Для гартмановского пограничного слоя аналогичные соотношения имеют вид

$$\Phi(\Psi) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}; \quad \Phi_1(\varphi) = \chi_1(\varphi) = \varphi''/R_0;$$

$$V_0^{IV} - V_0'' = i\alpha (\varphi^* \varphi' - \varphi \varphi^*').$$

В обоих случаях краевые условия

$V_0' + V_0'' = 0$  и  $V_0'' + V_0''' = 0$  на внешней границе выделяют ограниченные при  $y \rightarrow \infty$  решения  $V_0$ . Соответствующим образом модифицируются граничные условия для амплитуд колебаний (2) и (3).

Различие операторов  $\Phi(\Psi)$  приводит к небольшим вариациям рассчитанных параметров, но качественно картина одна и та же. Автоколебания для всех точек нейтральной кривой ветвятся в область устойчивости исходного течения (рис. 70), а добавочная средняя скорость локализуется в пограничном слое. Различие характеристик ветвления на носике нейтральной кривой отражено в табл. 7. Последняя строчка этой таблицы отвечает случаю, когда в уравнениях для возмущений добавочные члены были отброшены, но профиль скорости основного течения соответствовал (3). Слабое влияние

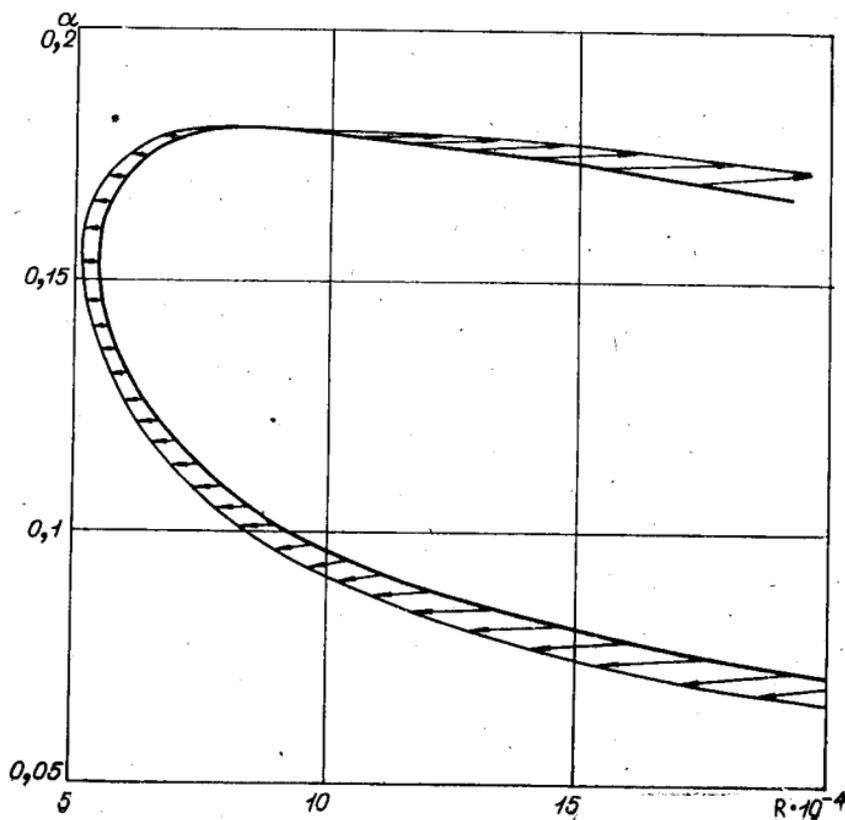


Рис. 70.

оператора  $\Phi(\Psi)$  на результаты свидетельствует о том, что доминирующую роль для характера ветвления автоколебаний играет форма профиля скорости.

Жесткий характер возбуждения нового режима в асимптотических пограничных слоях объясняет расхождение между данными линейной теории о стабилизации ламинарного течения с помощью отсоса или наложения поперечного магнитного поля и экспериментальными данными по переходу. В случае магнитного поля это расхождение составляет более двух порядков по числам Рейнольдса.

Однако анализ ветвления, позволяя предсказать и объяснить это расхождение, не дает возможности хотя бы приближенно оценить его величину и тем более рассчитать нелинейное критическое число Рейнольдса. Это связано с тем, что рассматриваются конечные, но малые амплитуды пульсаций. Попытки распространить анализ на область больших амплитуд приводят к резкому увеличению числа гармоник и, следовательно, к значительному росту вычислительных трудностей. Более того, рождающееся вторичное течение является двумерным и периодическим, т. е. слишком простым, чтобы описать сложный процесс нелинейной устойчивости в целом. В рамках такого подхода практически невозможно проанализировать про-

Таблица 7

Параметры ветвления для асимптотических пограничных слоев

Наименование	$\eta/c$	$C_0$	$\alpha^*$	$R^*$	$C_2 R^*$	$A^*$	$dR/dE$
Отсос . . . . .	0,16	0,15	0,156	54 370	-0,104	0,206	-0,271
Магнитное поле	0,16	0,155	0,162	48 310	-0,101	0,246	-0,265
$\Phi(\Psi) \equiv 0$ . . . . .	0,16	0,156	0,162	47 110	-0,103	0,239	-0,270

цесс возбуждения новых степеней свободы вследствие неустойчивости.

Все это указывает на то, что пути исследования устойчивости следует искать в построении более простых моделей, которые, однако, отражают принципиальную сторону явления. Одна из возможностей построения такой модели рассматривается в следующем параграфе.

### § 5. МОДЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ

Поскольку ответвляющиеся от стационарного решения малые автоколебания при течениях в каналах, как правило, неустойчивы и существуют не при всех значениях параметров, то естественно возникает вопрос, к чему и каким образом эволюционируют нарастающие малые возмущения. Трудности решения этой задачи в рамках полных уравнений Навье—Стокса вызвали к жизни различные модели нелинейного развития возмущений. Так, в работе Ландау [129] было предложено модельное уравнение для амплитуды возмущений

$$dA^2/dt = 2\gamma A^2 - \delta A^4 + \dots \quad (1)$$

Величина  $\gamma$  — инкремент нарастания по линейной теории, коэффициент  $\delta$  и последующие подлежат определению. Уравнение (1) описывает эволюцию амплитуды такого возмущения, которое в начальный период было малым и практически синусоидальным. В этом случае уравнение (1) можно получить методом теории возмущений, разлагая решение в ряд по малому параметру аналогично тому, как это продемонстрировано в § 2 наст. главы, проектируя на основную гармонику и интегрируя по области. Легко видеть, что при этом нечетные степени амплитуды выпадают и получается уравнение вида (1). К сожалению, коэффициенты ряда (1) определяются апостериорно после решения задач для первого (линейного) и последующих приближений. Обычно после вычисления первых коэффициентов ряд (1) обрывают и изу-

чают поведение амплитуды в рамках «урезанного» уравнения. Если сохранить только первые два члена, общее решение (1) получается в виде

$$A^2 = C \exp 2\gamma t / [1 + \delta/2\gamma \cdot C \exp 2\gamma t]. \quad (2)$$

Отсюда следует, что при  $\delta/2\gamma > 0$  решение либо затухает, если  $\gamma < 0$ , либо при  $\gamma > 0$  растет, стремясь к конечному пределу  $A^2 = 2\gamma/\delta$ . При небольших сверхкритических значениях  $R$   $\gamma \sim R - R_*$ , а  $\delta$ , вообще говоря, не обращается в нуль при  $R = R_*$ , поэтому пропорциональность энергии установившегося режима  $R - R_*$  полностью соответствует изложенной выше теории ветвления. Более парадоксален случай  $\delta/2\gamma < 0$ . Тогда при  $\gamma > 0$  малые возмущения за конечный отрезок времени  $T = 1/2\gamma \cdot \ln |2\gamma/(\delta C)|$  становятся бесконечно большими, а случай  $C > |2\gamma/\delta|$  не имеет физического смысла, поскольку  $A^2 < 0$ . Если  $\gamma < 0$ , то малые возмущения затухают, но если  $C > |2\gamma/\delta|$ , то за конечное время  $T$  энергия возмущений обращается в бесконечность. Конечно, при достаточно больших  $A$  ограничиваться двумя членами разложения нельзя и решение (2) становится непригодным. Тем не менее все описанные ситуации, за исключением ( $\delta < 0$ ;  $\gamma > 0$ ;  $C > |2\gamma/\delta|$ ), хорошо согласуются с характером ветвления автоколебаний и анализом их устойчивости по амплитуде.

Интересные результаты в данном направлении исследования нелинейной устойчивости были получены Струминским [212—214], который показал, что уравнение типа (2) может быть записано уже в рамках первого приближения, если использовать разложения независимой переменной (времени) в ряд по малому параметру (метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го). Другими словами, это равносильно введению «быстрого» времени (порядка периода колебаний) и «медленного» времени с масштабом, обратным инкременту нарастания. Уравнение для амплитуды получается после усреднения по «быстрому» времени (метод Боголюбова). Эти идеи в той или иной модификации были использованы в ряде последующих публикаций [89, 90, 297, 370—373, 395, 539]. Численный расчет временной эволюции возмущений при определен-

ных допущениях предпринят в работах [318, 322, 343].

В рамках такого подхода удается рассчитать лишь начальный этап эволюции нелинейных возмущений, причем нередко результаты расчета вступают в противоречие с математическими свойствами уравнений Навье—Стокса и физическим смыслом. Это относится, в первую очередь, к эффекту так называемого нелинейного взрыва, когда за конечное время энергия возмущений становится неограниченной. В ряде статей [370—373] это явление интерпретируется как аналог перехода к турбулентности и квалифицируется как достижение нелинейной теории. Но Серрин [523] показал, что энергия возмущений может расти со временем не быстрее, чем экспоненциально. В предыдущей главе получены оценки сверху для энергии стационарных в среднем решений уравнений Навье—Стокса при течении в канале. Упомянутые «взрывы» связаны с недостаточностью рассматриваемых частных нелинейных моделей при больших амплитудах и неуниверсальностью описания при малых. Об этом, в частности, свидетельствует пример уравнения (2). Коэффициент  $\delta$  при ветвлении стационарных автоколебаний пропорционален  $dR/dE$  на нейтральной кривой и в некоторых точках может обращаться в нуль. В таком случае для описания нелинейных эффектов недостаточно ограничиться двумя членами разложения (1).

Указанные попытки учесть нелинейные эффекты носят частный характер и не допускают дальнейшего обобщения. Мы попытаемся наметить некоторый гипотетический путь точного решения проблемы нелинейной устойчивости и турбулентности с тем, чтобы шагами на этом пути использовать для построения более адекватной модели.

Будем исходить из того факта, что реальный стационарный турбулентный режим устойчив к внешним возмущениям в том смысле, что все моменты скоростей и давлений возвращаются с течением времени к своим стационарным значениям. Помимо общих соображений в настоящее время существуют экспериментальные исследования, в которых измерены количественные характеристики этой устойчивости, о чем подробнее речь пойдет в следующей главе.

Будем также опираться на эргодическую гипотезу, согласно которой, почти все точные решения уравнений Навье — Стокса обладают тем свойством, что все их моменты, полученные путем усреднения по времени, совпадают со статистическими средними по ансамблю случайных реализаций. В пользу этого свидетельствует сложный характер незатухающих во времени решений уравнений Навье — Стокса, который полезно проанализировать несколько подробнее.

В простейшем случае устойчивого стационарного ламинарного течения в канале спектр решения состоит из единственной  $\delta$ -функции  $\delta(k)$  с носителем в точке  $k=0$  (для краткости под  $k$  подразумевается весь набор волновых чисел и частот, отвечающих однородным переменным). Если в начальный момент задано гармоническое возмущение с волновым числом  $k$  из диапазона неустойчивости, то в силу нелинейного взаимодействия разовьется, как было показано выше, чисто периодический режим, спектр которого содержит счетный набор  $\delta$ -функций, расположенных в точках  $nk$ . Среди всех этих гармоник лишь первая является выделенной, поскольку именно она порождает спонтанную генерацию пульсационной энергии. Существование других гармоник носит вынужденный характер, и малое возмущение, состоящее из суперпозиции этих гармоник, вообще говоря, будет затухать. Поэтому будем говорить, что такой режим обладает лишь одной степенью свободы, связанной с затравочной гармоникой, которую можно выбирать по произволу из диапазона неустойчивости.

Совсем другая, более сложная, картина получается при внесении в поток двухгармонического возмущения с волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$ , выбранными из области неустойчивости. Вследствие нелинейных взаимодействий возникает спектр вида  $k = mk_1 + nk_2$ , где  $m, n$  — произвольные целые числа. Если числа  $k_1$  и  $k_2$  соизмеримы и имеют наибольший общий делитель  $\Delta$ , то возникает также режим с периодом  $2\pi/\Delta$ , а спектр будет иметь вид «частоты» переменной «высоты» с шагом  $\Delta$ . Однако, если  $k_1$  и  $k_2$  несоизмеримы, множество точек — носителей  $\delta$ -функций, оставаясь счетным, становится всюду плотным на оси  $k$ , наподобие множества всех рациональных

чисел. Такой же счетный всюду плотный спектр получится в общем случае, если исходный сигнал состоял из любого конечного или счетного набора гармоник.

Не исключено, конечно, что в процессе эволюции все же установится периодический режим, а гармоники, некратные основной, затухнут, как это, например, имеет место в случае конвективной, или тейлоровской, неустойчивости. Но подобная ситуация исключительна и реализуется лишь при умеренных числах Рейнольдса.

С другой стороны, даже при весьма больших  $R$  любой стационарный детерминированный процесс, удовлетворяющий уравнениям движения вязкой жидкости, по-видимому, обладает, самое большее, счетным спектром. В пользу этого может быть высказано то физическое соображение, что влияние вязкости должно гасить пульсации с очень большими частотами, поэтому Фурье-образы непрерывной части спектра в области больших  $k$  должны быстро затухать с ростом  $k$ . Но тогда процесс, соответствующий непрерывной части спектра, вследствие энергетического равенства Парсевеля будет затухать во времени и пространстве, что позволяет исключить его из рассмотрения при изучении стационарных колебаний.

Заметим, что при аппроксимации таким решением со счетным всюду плотным спектром реального турбулентного режима с непрерывным спектром различие практически невозможно установить в силу усреднения, связанного с конечными размерами измерительных устройств. В этом смысле такой специальный автоколебательный режим можно отождествить с турбулентным.

Рассмотрим класс точных решений уравнений Навье—Стокса, удовлетворяющих эргодической гипотезе, т. е. обладающих одинаковыми моментами, совпадающими с вероятностными средними для турбулентного потока. В него будут входить решения, которые можно интерпретировать как динамические системы, состоящие из счетного числа нелинейных связанных осцилляторов и отличающиеся друг от друга только счетным набором произвольных фаз. Такой класс решений устойчив в том смысле, что любое малое возмущение не выводит за границы этого класса в силу предполагаемой устойчивости турбулентного режима. Существуют и дру-

гие решения уравнений Навье — Стокса, не принадлежащие этому классу. Наша цель — построение такой последовательности приближенных решений, которая имела бы своими предельными точками решения из устойчивого класса.

Естественно, на каждом уровне аппроксимации будем приближать решение конечным числом гармоник. Конечномерная модель должна обладать свойством самовозбуждения и сильным нелинейным взаимодействием между гармониками, чтобы наиболее адекватно отражать общий случай развитой турбулентности. Поскольку при этом желательно получить наилучшее приближение с помощью небольшого числа гармоник, возникает проблема оптимального выбора их параметров. Мы отмечаем, что гармоники в счетном спектре неравноправны, например в случае автоколебаний Юдовича основную роль играет первая затравочная гармоника. Разумно на первом этапе учитывать лишь эти основные гармоники, порождающие новые степени свободы, и пренебречь обертонами, которые играют роль поправок и существование, которых обусловлено наличием базисных мод. Заметим, что сумма даже небольшого числа гармонических колебаний с несоизмеримыми волновыми числами в  $x$ -пространстве дает весьма сложную картину пульсаций, которая по виду не отличается от случайных.

Выбор базисных гармоник в рамках рассматриваемой модели осуществляется на основе их естественного возбуждения в результате потери устойчивости основного режима течения как решение нелинейной задачи на собственные значения. Пусть в потоке возбуждено  $n$  степеней свободы, соответствующих  $k_1, k_2, \dots, k_n$  волновым векторам. Будем искать решение вида 
$$V = \sum_m V_m e^{ik_m x},$$

где  $V_m$  не зависит от вектора  $x$ , представляющего собой совокупность всех однородных координат. Подставим это выражение в уравнения Навье — Стокса (III.4.1) и спроектируем его на  $n$  «осей», т. е. умножим на  $e^{-ik_m x}$  и усредним по однородным переменным. Тогда получится система  $n$  уравнений для определения неизвестных амплитуд  $V_m$ , являющихся функциями неоднородных переменных. Для плоскопараллельного течения неоднород-

ной является лишь одна координата  $y$ , и мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если числа  $k_1, k_2, \dots, k_n$  не связаны специальными соотношениями, нелинейные члены не дадут никакого вклада в проекции и все уравнения сведутся к одному и тому же уравнению Орра — Зоммерфельда (в двумерном случае) и уравнению Рейнольдса, которое будет единственным нелинейным регулятором. Более сильное нелинейное взаимодействие можно учесть, выбрав векторы  $k_m$  так, чтобы каждый из них представлял сумму или разность из числа остальных. Если это возможно, то получится  $n$  зацепленных нелинейных уравнений, которые совместно с уравнением Рейнольдса (III.4.2) образуют замкнутую систему для определения амплитуды  $V_m$  и среднего профиля скорости  $U$ .

Такая система уравнений, будучи однородной, всегда имеет тривиальное решение с амплитудами пульсаций  $V_m = 0$ , что соответствует ламинарному режиму течения. Задача состоит в отыскании нетривиальных решений, т. е. таких значений частот и волновых чисел, которые будут собственными для системы нелинейных уравнений. Иными словами, определению подлежат такие значения параметров  $k_m$ , на которых осуществляется генерация пульсационной энергии.

В случае достаточно малых амплитуд пульсаций получается классическая задача об устойчивости ламинарного течения. Так как собственные параметры в этом случае известны или легко могут быть вычислены, то нелинейный случай можно рассчитать «по непрерывности», постепенно увеличивая амплитуду колебаний.

Отметим, что процедура получения системы амплитудных уравнений формально совпадает с методом Галеркина, но отличается от него тем, что базисные функции не фиксируются заранее, а их параметры определяются в результате решения нелинейной задачи на собственные значения.

Поскольку кратные гармоники не рассматриваются, уравнения для амплитуд независимы в том смысле, что допускают решения с произвольным набором амплитуд, равных нулю, т. е. независимо могут существовать одно-, двух- и полигармонические решения. Нетривиальное ре-

шение для очередной гармоник возможно только, если набор отвечающих ей параметров является собственным.

Таким образом, каждый из режимов будет неустойчив к возмущению с большим числом степеней свободы, так что рассматриваемая модель реализует схему Ландау для последовательного возбуждения степеней свободы, правда, в несколько ином смысле, так как, по Ландау, новые степени свободы возбуждаются во все возрастающем, но конечном количестве с ростом числа Рейнольдса, тогда как в данной модели они появляются в процессе последовательных конечномерных приближений.

Отметим, что схема Ландау может быть реализована только в таком модельном смысле, поскольку точные решения уравнений Навье — Стокса, за исключением чисто периодических режимов, не могут иметь конечного числа степеней свободы, т. е. не могут, например, быть двухпериодическими, а имеют всюду плотный спектр.

Решение нелинейной задачи на собственные значения в рамках  $n$ -мерного приближения не определит, однако, параметры колебаний однозначно. Как будет показано в следующем параграфе, уже в моногармоническом случае существует определенный интервал волновых чисел, каждой точке которого соответствует одно или два нетривиальных решения. Набор таких решений обладает различными свойствами устойчивости, для которого полезно ввести ту же иерархию, что и для модельных решений. Самой нижней в этой иерархии будет устойчивость по амплитуде тех гармоник, которые составляют решение  $n$ -мерной модели. В подклассе устойчивых по амплитуде решений далее можно выделить решения, устойчивые по отношению к гармоническому малому возмущению с другой длиной волны. Ниже будет показано, что существует единственное моногармоническое колебание, устойчивое (нейтрально) к таким возмущениям. Оно, однако, теряет устойчивость под действием специального двухгармонического возмущения, резонансным образом связанного с основным волновым числом  $k_1$  соотношением  $k_1 \pm k_2 \pm k_3 = 0$ . Под действием этого возмущения разовьется новый трехгармонический режим, который, по терминологии монографии [79], можно назвать триплетом. Среди всевозможных триплетов, в свою очередь, можно

выбрать устойчивый по амплитуде, устойчивый к гармоническим возмущениям, нейтрально устойчивый к двухгармоническим резонансным возмущениям, но неустойчивый к полигармоническому возмущению с более сильным, чем триплетное, взаимодействием.

По индукции естественно предположить, что существует такой автоколебательный режим с  $n$  степенями свободы, который будет устойчив к произвольным малым возмущениям с меньшим числом степеней свободы, нейтрально устойчив к возмущениям с  $n$  степенями свободы и неустойчив к возмущениям с  $n+1$  степенями свободы. Такой режим естественно назвать максимально устойчивым на данном  $n$ -мерном уровне. Можно ожидать, что последовательность подобных максимально устойчивых модельных решений при  $n \rightarrow \infty$  будет иметь своими предельными точками точные решения уравнений Навье — Стокса из устойчивого класса. Предлагаемый здесь метод аппроксимации стационарной турбулентности и состоит в последовательном определении этих режимов.

Отмеченная относительная независимость амплитудных уравнений позволяет для решения задачи использовать эскалаторный процесс последовательного рассмотрения задач с нарастающим числом гармоник, причем каждая последующая задача включает предыдущие как частный случай. Естественно начать исследование с простейшего случая моногармонических колебаний.

## § 6. МОНОГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В среднем установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями (III.4.1.) и (III.4.2), которые для плоскопараллельного течения в канале принимают вид

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + K_k = - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{R} \Delta v_k;$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0;$$

$$U_k = \{U(y); 0; 0\}; K_k = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_k v_j - \overline{v_k v_j}); \quad (1)$$

$$U' = R(\overline{v_x v_y} - \lambda_0 y); \quad \overline{v_y v_z} = 0; \quad (2)$$

$$\lambda_0 = 3/R + 3/2 \int_{-1}^1 y \overline{v_x v_y} dy.$$

В случае моногармонической аппроксимации следует положить

$$v_x = \cos \beta z \operatorname{Re}[u(y)T]; \quad v_y = \cos \beta z \operatorname{Re}[v(y)T];$$

$$v_z = \sin \beta z \operatorname{Re}[\omega(y)T]; \quad p = \cos \beta z \operatorname{Re}[q(y)T];$$

$$T = \sqrt{2\alpha/R} J \exp[i\alpha(x - Ct)], \quad (3)$$

где  $J$  — амплитудный множитель;  $C$  — фазовая скорость, предполагаемая вещественной в силу стационарности колебаний.

Таким образом, рассматривается бегущая волна в продольном направлении и стоячая — в трансверсальном. Поскольку операция усреднения подразумевает интегрирование по всем однородным координатам, то выбранная форма решения автоматически обеспечивает выполнение второго равенства (2) и соответствует условию симметрии течения относительно знака  $\beta$ .

После подстановки (3) в уравнение (1) и проектирования на соответствующие гармоники члены, порождаемые  $K_n$ , выпадают, так что получается система (II.1.6), в которой, однако, профиль скорости  $U(y)$  не является заданным, а подлежит определению с помощью уравнения (2).

Для напорного течения в плоском канале, как будет показано далее, можно ограничиться случаем двумерных колебаний с  $\beta = 0$ , который отражает главные черты явления, и задача сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\theta'' - \alpha^2 \theta = i\alpha R[(U - C)\theta - U''\theta];$$

$$v'' - \alpha^2 v = 0;$$

$$U'' = J^2(v_i \theta_r - v_r \theta_i) - \lambda; \quad (4)$$

$$\lambda = 3 + 3/2 \cdot J^2 \int_0^1 y(v_i v_2' - v_2 v_i') dy;$$

$$U = v = v' = 0 \text{ при } y = \pm 1.$$

Вид выражения для  $\lambda$  обеспечивает выполнение расходного соотношения  $\int_0^1 U dy = 1$ . Величина  $\lambda$  пропорциональна градиенту давления и при принятой здесь нормировке равна производной средней скорости на стенке  $|U'(1)|$ . За счет введения произвольного амплитудного множителя  $J$  собственную функцию  $v(y)$  можно нормировать по произволу, например, положить  $v(0) = 1$ .

Систему (4) можно получить другим путем, отправляясь от уравнений Фридмана — Келлера для моментов турбулентных полей в случае плоского движения, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - U'' \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{R} \Delta^2 \psi + K - \bar{K};$$

$$K = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x}, \quad (5)$$

где  $\psi$  — функция тока возмущенного движения. Уравнения для вторых моментов получаются следующим образом. Вводятся две совокупности независимых переменных:  $M_1(t_1, x_1, y_1)$  и  $M_2(t_2, x_2, y_2)$ . Обозначив  $\psi_1 = \psi(M_1)$ ;  $\psi_2 = \psi(M_2)$  и понимая под  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  соответствующие операторы Лапласа, из (5) нетрудно получить

$$\frac{\partial \Delta_k \Phi_2}{\partial t_k} + U(y_k) \frac{\partial \Delta_k \Phi_2}{\partial x_k} - U'' \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_k} =$$

$$= \frac{1}{R} \Delta_k^2 \Phi_2 + \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial \Delta_k \Phi_3}{\partial y_k} - \frac{\partial}{\partial y_3} \frac{\partial \Delta_k \Phi_3}{\partial x_k} \right]_{M_3=M_1}; \quad (6)$$

$$k=1, 2.$$

Здесь  $\Phi_2 = \overline{\psi_1 \psi_2}$ ;  $\Phi_3 = \overline{\psi_1 \psi_2 \psi_3}$  — вторые и третьи моменты (кумулянты) функции тока;  $k$  не является индексом суммирования.

Если  $\psi_1$  — функция тока модельного автоколебательного движения, то в силу гармонической зависимости от

однородных координат  $\Phi_3 \equiv 0$ . Второй момент  $\Phi_2$  имеет вид

$$\Phi_2 = \operatorname{Re} \{ \exp [i\alpha(x_1 - x_2) - i\alpha C(t_1 - t_2)] v(y_1) v^*(y_2) \}. \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что  $\Phi_2$  — точное решение уравнения (6), если  $v(y)$  — решение системы (4). Следовательно, рассматриваемые модельные автоколебания удовлетворяют уравнениям для первых и вторых моментов в цепочке Фридмана — Келлера. Однако уравнения для старших моментов не выполняются. При обрыве цепочки уравнений для моментов иногда получаются решения, в которых функции, имеющие смысл средних квадратов, принимают отрицательные значения [163], что противоречит физическому смыслу. Решение (7) свободно от этого недостатка.

Система уравнений (4) представляет нелинейную задачу на собственные значения. Тривиальное решение  $v \equiv 0$  отвечает ламинарному течению Пуазейля  $U = 3/2 \cdot (1 - y^2)$ . Решения системы (4) имеют следующие свойства.

1. Если существует решение  $\{v, U\}$ , то существует и решение  $\{v \exp(i\gamma), U\}$ , где  $\gamma$  — произвольное вещественное число. Поэтому для однозначности решения нормировочное условие на  $v$  должно быть комплексным.

2. Если  $J = 0$ , то  $U = 3/2 \cdot (1 - y^2)$ , а параметры  $\alpha, R, C$  и собственная функция  $v(y)$  отвечают нейтральным колебаниям течения Пуазейля.

3. В пространстве  $\{\alpha, R, J\}$  существует нейтральная поверхность, которая в сечении  $J = 0$  совпадает с классической нейтральной кривой.

В моногармоническом случае задача свелась к системе уравнений, которая впервые была исследована для малых колебаний в нелинейной теории гидродинамической устойчивости [450]. В отличие от ранних подходов нас будут интересовать колебания с большими амплитудами в соответствии с поставленной здесь задачей анализа устойчивости в целом. Цель анализа — выяснить к чему в рамках моногармонической модели эволюционируют нарастающие, по линейной теории, колебания.

Решения задачи (4) были получены численными методами исходя из известных решений линеаризованной задачи ( $J=0$ ) посредством непрерывного изменения параметров  $J$ ,  $\alpha$ ,  $R$ . Два из них могут быть заданы произвольно (из некоторого диапазона), а третий и величина  $C$  определяются как собственные значения. Пусть разыскиваются решения с симметричными собственными функциями  $v(y)$

$$v'(0) = \theta'(0) = 0,$$

которым в линейном случае и соответствуют нейтральные колебания. Тогда при заданных параметрах  $R$ ,  $J$ ,  $\alpha$ ,  $C$  решение системы (4), удовлетворяющее неоднородным условиям

$$v(0) = 1 \text{ (или } \theta(1) = 1), v(1) = U(1) = U'(0) = 0,$$

находится однозначно. Требование  $v'(1) = 0$  представляет собой комплексное условие для определения двух вещественных параметров —  $(C, \alpha)$ , или  $(C, R)$ , и  $(C, J)$  — по заданной паре других параметров. Пусть, например, задана интенсивность  $J$ , тогда можно построить зависимость  $\alpha(R)$ , аналогичную нейтральной кривой при  $J=0$ . При изменении  $J$  эта кривая в пространстве  $\{\alpha, R, J\}$  опишет некоторую поверхность, о чем говорилось выше.

Для упрощения задачи в системе (4) целесообразно произвести перенормировку, которая позволяет избавиться от функционала  $\lambda$ . С этой целью в качестве масштаба скорости нужно выбрать динамическую скорость  $v_* = \sqrt{\lambda/R}$ , что эквивалентно переходу от постановки задачи, в которой задан расход жидкости, к постановке задачи с заданным напряжением трения на стенке и искомым расходом. Из уравнений системы (4) изменяется только третье, в котором вместо величины  $\lambda$  используется  $R = v_* h / \nu$ . Следующее за ним соотношение для  $\lambda$  во внимание не принимается.

Средняя расходная скорость и соответствующее число Рейнольдса  $R_{\text{ср}}$  вычисляются по формулам

$$\underline{U}_{\text{ср}} = v_* \int_0^1 U dy; \quad R_{\text{ср}} = R \int_0^1 U dy.$$

Наиболее естественным алгоритмом решения задачи представляется простая итерация, состоящая в попеременном интегрировании уравнений Орра — Зоммерфельда и Рейнольдса. Однако опыт расчетов показал, что процесс сходится лишь при малых значениях  $J$ . Поэтому для решения задачи в общем случае использовался метод Ньютона — Канторовича, согласно которому вместо величин  $\theta$ ,  $v$ ,  $U$ ,  $\alpha$ ,  $C$ ,  $R$ ,  $J^2$  в систему (4) следует подставить возмущенные величины  $\theta + \tilde{\theta}$ ;  $v + \tilde{v}$ ;  $U + \tilde{U}$ ;  $\alpha + \tilde{\alpha}$ ;  $C + \tilde{C}$ ;  $R + \tilde{R}$ ;  $J^2 + \tilde{J}^2$  и линеаризовать эту систему относительно возмущений. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_r'' - (\alpha^2 + \alpha R J^2 v_i^2) \tilde{\theta}_r + \alpha R (U - C + J^2 v_r v_i) \tilde{\theta}_i + \\ + \alpha R J^2 v_i \theta_i \tilde{v}_r - \alpha R (F + J^2 v_i \theta_r) \tilde{v}_i + \alpha R \theta_i \tilde{U} = \\ = \alpha^2 \theta_r - \theta_r'' - \alpha R T_i + (2\alpha \theta_r - R T_i) \tilde{\alpha} + \alpha R \theta_i \tilde{C} - \\ - \alpha T_i \tilde{R} + \alpha R v_i G \tilde{J}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_i'' - \alpha R (U - C - J^2 v_r v_i) \tilde{\theta}_r - (\alpha^2 + \alpha R J^2 v_r^2) \tilde{\theta}_i + \\ + \alpha R (F - J^2 v_r \theta_i) \tilde{v}_r + \alpha R J^2 v_r \theta_r \tilde{v}_i - \alpha R \theta_r \tilde{U} = \\ = \alpha^2 \theta_i - \theta_i'' + \alpha R T_r + (2\alpha \theta_i + R T_r) \tilde{\alpha} - \alpha R \theta_r \tilde{C} + \\ + \alpha T_r \tilde{R} - \alpha R v_r G \tilde{J}^2; \end{aligned}$$

$$\tilde{v}_r'' - \tilde{\theta}_r - \alpha^2 \tilde{v}_r = \alpha^2 v_r + \theta_r - v_r'' + 2\alpha v_r \tilde{\alpha}; \quad G = v_i \theta_r - v_r \theta_i;$$

$$\tilde{v}_i'' - \tilde{\theta}_i - \alpha^2 \tilde{v}_i = \alpha^2 v_i + \theta_i - v_i'' + 2\alpha v_i \tilde{\alpha}; \quad F = J^2 G - R;$$

$$\tilde{U}'' - J^2 (v_i \tilde{\theta}_r - v_r \tilde{\theta}_i - \theta_i \tilde{v}_r + \theta_r \tilde{v}_i) = F - U'' + G \tilde{J}^2;$$

$$T = (U - C) \theta - F v.$$

Граничные условия для симметричного решения имеют вид

$$v' = \theta' = 0 \text{ при } y = 0; \quad v = v' = 0 \text{ при } y = 1.$$

Полученная система дифференциальных уравнений путем разностной аппроксимации вторых производных сводится к алгебраической системе вида

$$W_{n+1} + W_{n-1} - A W_n = Q_1 + Q_2 \tilde{\alpha} + Q_3 \tilde{C} + Q_4 \tilde{R} + Q_5 \tilde{J}^2, \quad (8)$$

где

$$W = \{\tilde{\theta}_r, \tilde{\theta}_i, \tilde{v}_r, \tilde{v}_i, \tilde{U}\};$$

$$A = \begin{pmatrix} g + SJ^2v_i^2 & -S(U - C + J^2v_i\theta_i) \\ S(U - C - J^2v_rv_i) & g + SJ^2v_r^2 \\ h^2 & 0 \\ 0 & h^2 \\ J^2h^2v_i & -J^2h^2v_r \\ SJ^2v_i\theta_i & S(F + J^2v_i\theta_r) - S\theta_i \\ -S(F - J^2v_r\theta_i) & -SJ^2v_r\theta_r & S\theta_r \\ g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ -J^2h^2\theta_i & J^2h^2\theta_r & 2 \end{pmatrix};$$

$$(g = 2 + \alpha^2h^2; \quad S = \alpha Rh^2)$$

$$Q_1 = h^2 \begin{pmatrix} \alpha^2\theta_r - \theta_r'' - \alpha RT_i \\ \alpha^2\theta_i - \theta_i'' + \alpha RT_r \\ \alpha^2v_r - v_r'' + \theta_r \\ \alpha^2v_i - v_i'' + \theta_i \\ F - U'' \end{pmatrix}; \quad Q_2 = h^2 \begin{pmatrix} 2\alpha\theta_r - RT_i \\ 2\alpha\theta_i + RT_r \\ 2\alpha v_r \\ 2\alpha v_i \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$Q_3 = \alpha Rh^2 \begin{pmatrix} \theta_i \\ -\theta_r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Q_4 = h^2 \begin{pmatrix} -\alpha(Rv_i + T_i) \\ \alpha(Rv_r + T_r) \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad Q_5 =$$

$$= h^2 G \begin{pmatrix} \alpha R v_i \\ -\alpha R v_r \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Алгебраическая система решалась методом разностной

прогонки с помощью соотношений

$$W_{n-1} = B_n W_n + D_n; \quad B_{n+1} = (A - B_n)^{-1};$$

$$D_{n+1}^{(k)} = B_{n+1} (D_n^{(k)} - Q_k);$$

$$B_0 = 1/2A(0); \quad D_0^{(k)} = 1/2Q_k(0);$$

$$W_N = \{1, 0, 0, 0, 0\}; \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Из четырех варьируемых параметров  $\alpha$ ,  $C$ ,  $R$ ,  $J^2$  в каждом конкретном расчете два параметра фиксировались. Если это были, например,  $R$  и  $J^2$ , то в соотношении (8) полагалось  $R = J^2 = 0$ . Задача решалась трижды при значениях  $k = 1, 2, 3$ . Общее решение для рассматриваемого случая может быть записано в форме

$$W = W_1 + \tilde{\alpha} W_2 + \tilde{C} W_3.$$

Для выполнения граничного условия  $v'(1) = 0$  необходимо потребовать выполнения равенств

$$\begin{cases} v'_{2r} \tilde{\alpha} + v'_{3r} \tilde{C} = -v'_{1r}; \\ v'_{2i} \tilde{\alpha} + v'_{3i} \tilde{C} = -v'_{1i}. \end{cases}$$

Решение этой системы дает поправки к  $\alpha$  и  $C$ , а вместе с тем и весь поправочный вектор  $W$ . Для получения решения с точностью 0,1% обычно требовалось 4—6 итераций. Следует отметить, что данный метод весьма чувствителен к выбору начального приближения, поэтому при движении по параметру требуется достаточно мелкий шаг. Положение улучшается, если прогнозировать решение с помощью параболической экстраполяции, используя данные с предыдущих шагов.

Поскольку амплитудный множитель  $J$  зависит от выбора нормировки собственной функции, при анализе результатов целесообразнее пользоваться интенсивностью  $I$ , определяемой как отношение среднеквадратичной амплитуды пульсаций к средней расходной скорости:

$$I = \sqrt{\int_0^1 v_k^2 dy} = J \sqrt{\alpha/R \int_0^1 (|v'|^2 + \alpha^2 |v|^2) dy}.$$

Для каждого значения  $I = \text{const}$  можно построить нейтральную кривую в плоскости  $(\alpha, R_{\text{cp}})$ . На рис. 71, а

изображены три такие нейтральные кривые, соответствующие интенсивности  $I=0; 0,16; 0,5$ . Отличие кривых 2, 3 от 1, представляющей собой нейтральную кривую течения Пуазейля, заключается в том, что каждой точке кривых 2 и 3 соответствует свой профиль средней скорости. При малых значениях  $I$  нейтральные кривые целиком охватывают классическую кривую с  $I=0$ . Следовательно, в противоположность точным автоколебательным решениям модельные автоколебания ответвляются в область устойчивости исходного режима во всех точках нейтральной кривой, т. е. они демонстрируют «более жесткий» характер возбуждения. Это отличие, однако, не принципиально, так как малые по амплитуде автоколебания неустойчивы и в том и в другом случае. Пунктирная линия на рис. 71, а является геометрическим местом носиков нейтральных кривых. Наименьшее число Рейнольдса, при котором существуют модельные автоколебания, составляет  $R_{cr}=1634$  и достигается при значениях параметров:  $\alpha=1,25; I=0,16; C=0,173$ . Это примерно согласуется с данными работы [355].

На рис. 71, б изображены сечения нейтральной поверхности плоскостями  $\alpha=\text{const}$ . Значения волновых чисел приведены на кривых. Величина  $\alpha=1,02$  соответствует носiku классической нейтральной кривой при  $I=0$ . Огибающая семейства проведена пунктиром. Нижней ветви этой кривой отвечают автоколебания с минимальной энергией при данном  $R$ . (Здесь и ниже величина  $R_{cr}$  обозначается через  $R$ .) Соответствующие им волновые числа изменяются мало — от 1,02 до 1,25 (носик нейтральной поверхности). Верхней ветви соответствуют автоколебания с максимальной энергией. С увеличением числа Рейнольдса волновое число для огибающей на некотором интервале остается почти постоянным и равным 1,25, а затем начинает убывать.

На рис. 71, в нанесены сечения  $R=\text{const}$ . Соответствующие числа Рейнольдса проставлены вблизи кривых. На рис. 71, г в изометрической проекции показана передняя часть нейтральной поверхности в пространстве  $(\alpha, R, I)$ .

Рассмотрим вопрос об устойчивости найденных стационарных автоколебаний. При  $I=0$  части плоскости  $(\alpha,$

R), ограниченной нейтральной кривой, отвечают нарастающие во времени возмущения. В рамках рассматриваемой модели их амплитуды в процессе роста стремятся к предельным значениям на верхней части нейтральной поверхности. Следовательно, область внутри нейтральной поверхности является областью нарастания моногармонических возмущений. В точках, расположенных вне ее, амплитуда колебаний уменьшается со временем, стремясь к нулю, если перпендикуляр, опущенный на плоскость  $I=0$ , не пересекает поверхности, или, в противном случае, к конечной стационарной величине, определяемой точкой пересечения. Следовательно, верхняя часть нейтральной поверхности отвечает устойчивым по амплитуде стационарным автоколебаниям, а нижняя — неустойчивым и в рассматриваемой модели она является сепаратриссой между двумя метастабильными состояниями, отделяющей область устойчивости исходного ламинарного режима от области притяжения устойчивых автоколебаний.

Практически одновременно с работой [71], где были получены эти результаты, появилась статья [580], в которой приведены данные прямого численного решения соответствующих нестационарных уравнений. Эти расчеты полностью подтвердили описанную здесь картину устойчивости по амплитуде. Кроме того, был проведен выборочный анализ трехмерных автоколебаний, который в совокупности с результатами Гроне [355] свидетельствует о том, что области неустойчивости при  $\beta > 0$  вложены в область, отвечающую значению  $\beta = 0$ , и, таким образом, двумерные возмущения в этом смысле наиболее опасны. В этой работе был также рассмотрен случай, когда учитывалась гармоника, двукратная основной. Результаты расчетов показывают, что ее вклад невелик даже при больших энергиях автоколебаний. Для носика нейтральной поверхности, например, учет кратной гармоники привел к изменению критического числа Рейнольдса от 1696 до 1643. Это свидетельствует в пользу высказанной концепции о предпочтительности учета не кратных гармоник, а осцилляций, порожденных неустойчивостью режима с меньшим числом возбужденных степеней свободы.

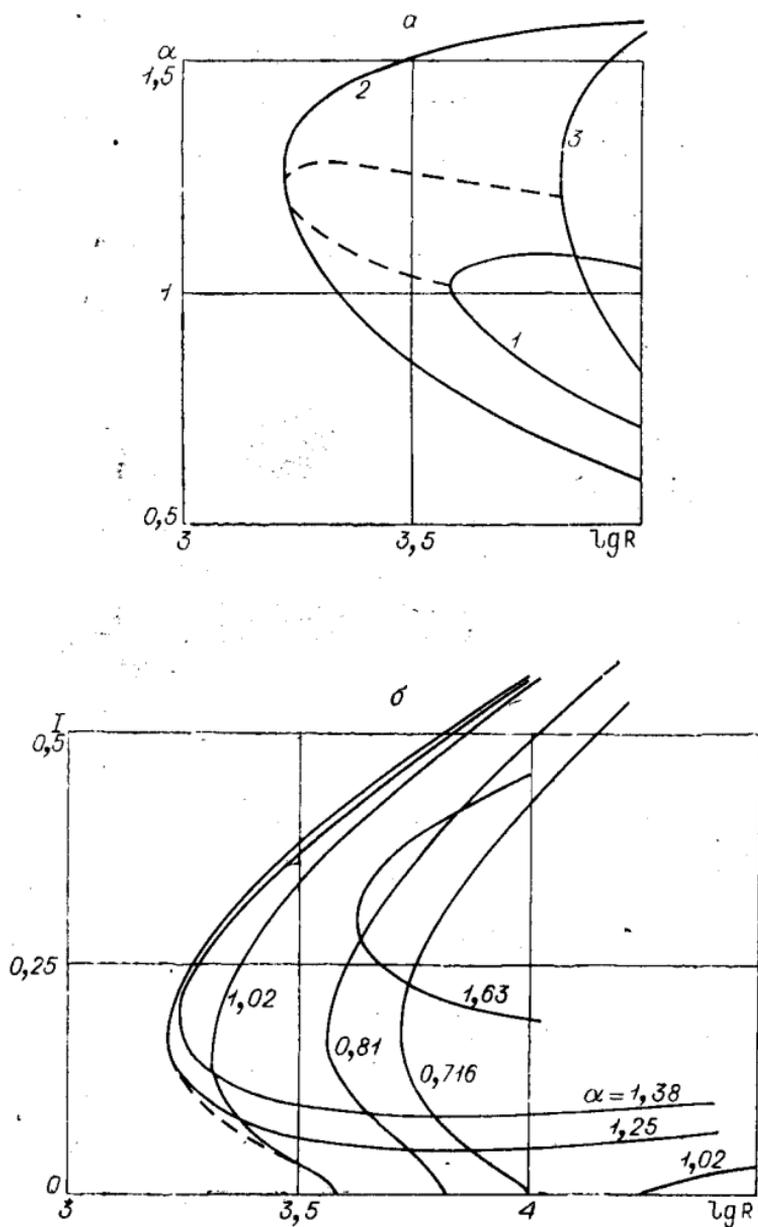
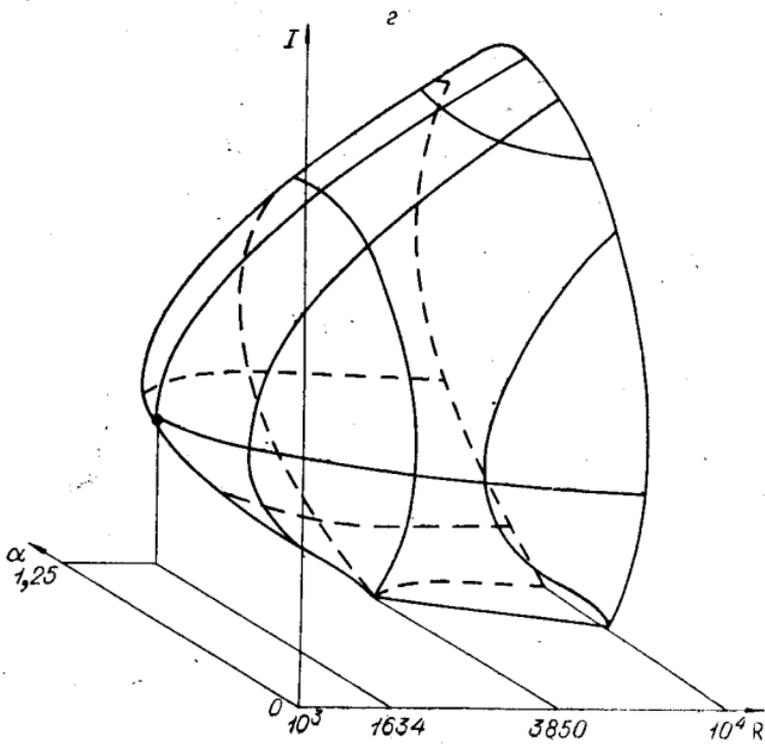
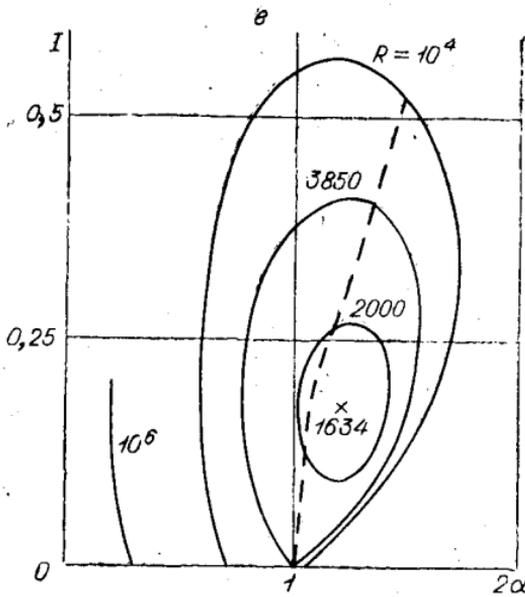


Рис. 71.

Для анализа устойчивости моногармонических автоколебаний по отношению к новым степеням свободы наложим на исследуемое движение, соответствующее не-



которой точке нейтральной поверхности, малое возмущение в виде второй гармоники. Проектируя на нее уравнение (1) после простых преобразований получим уравнение Орра — Зоммерфельда, в котором профиль скорости  $U(y)$  соответствует выбранному стационарному моногармоническому решению. В силу сказанного задача сводится к анализу устойчивости усредненных профилей скорости, отвечающих точкам нейтральной поверхности, которые можно условно рассматривать как плоскопараллельные ламинарные течения.

Если волновые числа рассматриваемого режима  $\alpha$  и наложенного возмущения  $\alpha_1$  совпадают, то получается задача об устойчивости по амплитуде, разобранная выше. Пусть  $\alpha_1 \neq \alpha$ . Рассмотрим какое-нибудь сечение нейтральной поверхности плоскостью  $R = \text{const}$ , например  $R = 10^4$  (см. рис. 71, в). Выберем одну из точек пересечения этой кривой с осью  $I = 0$ . Пусть, например, она отвечает нижней ветви нейтральной кривой ( $\alpha = 0,716$ ). Эта точка может считаться решением задачи на автоколебания при  $I = 0$ , так что область неустойчивости такого решения соответствует внутренней части нейтральной кривой. Если увеличить значение  $I$ , оставляя его небольшим, то из соображений непрерывности нейтральная кривая, отвечающая профилю скорости с  $I > 0$ , будет сначала слабо отличаться от нейтральной кривой параболы Пуазейля, и решение расположится на ее нижней ветви, так что течение будет неустойчиво к возмущениям с  $\alpha_1 > \alpha$ . Обходя кривую  $R = 10^4$ , мы в конце концов придем в точку  $I = 0$  на верхней ветви классической нейтральной кривой ( $\alpha = 1,07$ ). Поскольку попасть с нижней ветви нейтральной кривой, двигаясь вдоль нее, на верхнюю нельзя, минуя носик, то можно заключить, что на кривой  $R = 10^4$  есть одна точка, которой соответствует решение, устойчивое для возмущений с  $\alpha_1 > \alpha$  и с  $\alpha_1 < \alpha$ . Этой точке соответствует носик нейтральной кривой отвечающего ей профиля. Расчеты показали, что на нейтральной поверхности существует единственная линия, соответствующая устойчивым в указанном смысле решениям. Эта линия, естественно, берет начало в носике нейтральной кривой при  $I = 0$ , затем отклоняется в область меньших  $R$  вплоть до минимального зна-

чения  $R=1850$ , а затем уходит в область больших  $R$  по верхней части нейтральной поверхности, несколько не совпадая с ее «хребтом». Таким образом, в рамках проведенного анализа при каждом значении  $R > 1850$  существует единственный устойчивый автоколебательный режим. Интересно отметить, что в диапазоне  $1634 < R < 1850$  все решения неустойчивы по отношению к возмущениям с  $\alpha_1 > \alpha$ , что в каком-то смысле можно интерпретировать как явление перемежаемости.

Полученные результаты качественно верно свидетельствуют о неустойчивости ламинарного режима к конечным возмущениям. Достаточно сопоставить опытные данные (см. рис. 58) с огибающей на рис. 71, б, представляющей собой границу проекции нейтральной поверхности на плоскость  $(R, I)$ . Прямое количественное сравнение по критическим интенсивностям провести затруднительно, так как в опытах измерялась интенсивность продольной компоненты скорости на оси, обусловленная турбулентностью на входе, а теоретически рассчитывалась полная интенсивность автоколебаний в канале, порожденных симметричными решениями, у которых продольная компонента скорости на оси обращается в нуль. Более подошло бы сопоставление с данными об обратном переходе, но таковые, к сожалению, в литературе отсутствуют. Тем не менее видно, что теоретические и экспериментальные значения критических интенсивностей имеют одинаковый порядок.

Учет нелинейности в моногармонической модели позволил существенно снизить критическое число Рейнольдса по сравнению с линейной теорией с 3848 до 1634. В экспериментальных работах [267, 312, 410, 461, 477, 525] число Рейнольдса, при котором впервые наблюдался турбулентный режим, колебалось в пределах 600—1000, но ближе к 1000. Значения коэффициента сопротивления  $\lambda_0$ , определенного соотношением (2), показаны на рис. 72. Прямая 1 отвечает ламинарному закону сопротивления  $\lambda_0 = 3/R$ , линия 2 — результатам расчета модельных колебаний вдоль огибающей на рис. 71, б, кривая 3 — энергетическим оценкам  $\lambda_0$ , полученным в предыдущей главе, кривая 4 построена по

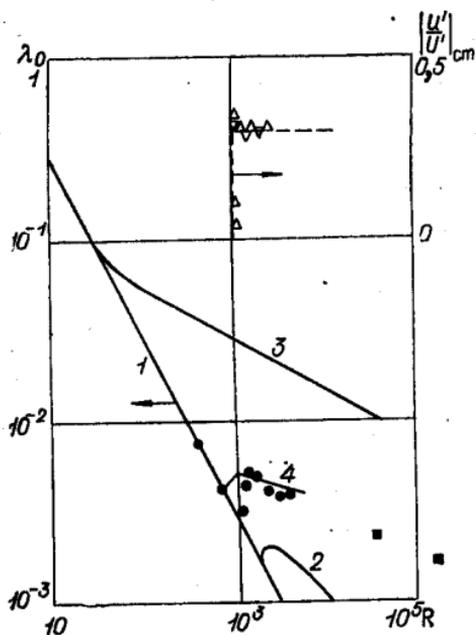


Рис. 72.

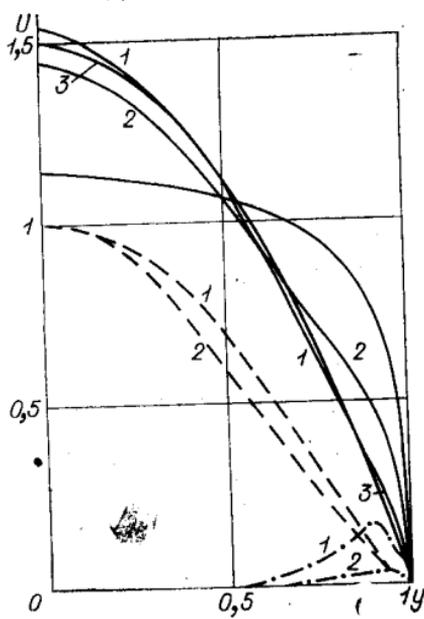


Рис. 73.

опытным данным [312], круглые точки соответствуют экспериментальным изменениям Гувакова [76], а также Мухина и Кузнецова. Квадратные точки — данные Конт-Белло [110]. Из рис. 72 видно, что кривая 2 качественно согласуется с опытными данными о переходе, хотя она несколько смещена в область больших чисел Рейнольдса. В верхней части этого рисунка отражена интенсивность пульсаций трения на стенке, причем треугольники с острием вверх соответствуют прямому переходу, а с острием вниз — обратному. Эти данные говорят о жестком характере возбуждения нового режима. Характерно, что амплитуда пульсаций резко возрастает практически от нуля до 30—35%, в то время как средний коэффициент сопротивления лишь незначительно изменяется по сравнению с ламинарным режимом. Это свидетельствует о том, что профиль скорости не успевает претерпеть значительной деформации.

Аналогичная картина следует и из анализа модельных колебаний. На рис. 73 приведены некоторые решения задачи об автоколебаниях. Сплошными линиями на-

несены профили  $U(y)$ , а пунктирными и штрих-пунктирными — соответственно  $v_r$  и  $10v_i$ . Кривые 1 отвечают носу нейтральной поверхности, т. е. нелинейному критическому числу Рейнольдса. Хотя интенсивность пульсаций достаточно большая ( $I=0,16$ ), профиль  $U(y)$  весьма близок к параболе Пуазейля 3. Эти свойства автоколебаний, согласующиеся с опытными данными о переходе, к сожалению, сохраняются и при больших числах Рейнольдса. Кривые 2 отражают результаты расчетов для  $R=10^4$ , отвечающие максимальной интенсивности  $I=0,62$ . Хотя амплитуда колебаний в этом случае имеет порядок средней скорости, профиль  $U(y)$  по сравнению с ламинарным случаем деформирован слабо и отличается от экспериментального турбулентного профиля (см. кривую без номера на рис. 73) [430]. Аналогичный вид имеют профили средней скорости для максимально устойчивого решения, соответствующего точке пересечения пунктирной линии с линией  $R=10^4$ , и решение с максимальным значением  $\lambda=10,5$  ( $\lambda_{\text{лам}}=3$ ;  $\lambda_{\text{турб}}=25$ ), отвечающее некоторому промежуточному значению  $\alpha$ . Таким образом, в рамках модели моногармонических колебаний не удастся приблизиться к турбулентным характеристикам по профилю средней скорости и коэффициенту сопротивления. Заметим, однако, что максимально устойчивый профиль скорости все же значительно ближе к опытному, чем, например, профиль, полученный в результате усреднения всех возможных автоколебаний вдоль кривой  $R=10^4$  на рис. 71, в, что было бы в духе статистического подхода к проблеме. Правда, следует оговориться, что, может быть, не все режимы следует считать равновероятными. Но тогда возникает вопрос о вероятностной мере того или иного решения. Впрочем, если вероятностную характеристику режима связать с его «временем жизни», определяемым устойчивостью соответствующего решения, то наиболее вероятным режимом будет максимально устойчивый. Но в таком случае статистическое описание не так уж необходимо. Интересно отметить связь полученных результатов с явлениями, наблюдаемыми при наложении трансверсального магнитного поля на турбулентное течение проводящей жидкости. Поскольку такое поле не взаимодействует с движением в перпенди-

кулярной ему плоскости, но подавляет вследствие джоулевой диссипации трехмерные возмущения, возникает практически двумерный турбулентный режим [105]. Ему свойственны большие интенсивности пульсаций, но весьма близкие к ламинарным профили скорости и коэффициенты сопротивления, т. е. те же эффекты, которые присущи двумерным моногармоническим автоколебаниям.

Случай с внешним магнитным полем интересен и в другом отношении. Как было показано, при точном анализе ответвления малых автоколебаний от ламинарного режима при течении проводящей жидкости в продольном магнитном поле происходит смена режима возбуждения с жесткого на мягкий. Учет продольного магнитного поля в модельной задаче о моногармонических автоколебаниях не составляет больших трудностей. Надо лишь добавить в левую часть первого уравнения (4) член  $\alpha^2 \text{Na}^2 v$ . На рис. 74 отражены результаты расчетов для ряда значений числа Гартмана  $\text{Na}$ . Кривая 1 ( $\text{Na}=0$ ) соответствует огибающей на рис. 71, б и нанесена для сопоставления. Кривые 2—5 отвечают значениям  $\text{Na}=12,6; 16,1; 21$  и  $27$ . Характер возбуждения меняется при  $\text{Na} \approx 21$ . При  $\text{Na} > 21$  модельные автоколебания возбуждаются мягким образом и устойчивы. Напомним, что точный анализ ветвления дал для переходного значения числа Гартмана  $\text{Na}=15,5$ . В табл. 8 приведены численные значения критических параметров  $R_c$  и  $\alpha_c$  по линейной теории в сопоставлении с параметрами  $R_n$ ,  $\alpha_n$ ,  $I$  по нелинейной модельной теории (нормировка по максимальной скорости). Эти результаты качественно согласуются с точным анализом ветвления и, кроме того, позволяют оценить нелинейные критические параметры.

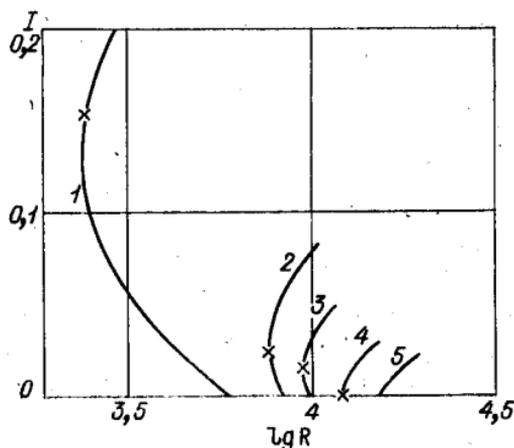


Рис. 74.

Попытаемся проанализировать причины недостаточности моногармонической модели. Моногармоническое приближение эквивалентно отбрасыванию в (1) члена  $K_h$ . В этом случае система (1) — (2) допускает синусоидальные решения вида (3). Можно сказать, что моногармонический подход моделирует реальные турбулентные пульсации некоторыми эквивалентными гармоническими волнами. Неучет члена  $K_h$  означает «выключение» каскадного процесса Ричардсона — Колмогорова, так что в данной модели диссипация энергии осуществляется на тех же масштабах, что и генерация. Это и приводит к существенному завышению уровня пульсационной энергии против опытных данных. Качественное согласие моногармонической модели по ряду показателей с экспериментом обусловлено тем, что она верно отражает генерационный аспект проблемы турбулентности.

Важно отметить, что наибольшие расхождения по профилям средней скорости — рассчитанному и измеренному — имеют место в ядре потока. Причину этого легко выяснить, анализируя характер собственных функций моногармонического решения. Из рис. 73 видно, что мнимая часть  $v_i$  отлична от нуля лишь в пристенной зоне, где сказывается влияние вязкости. Вне этой зоны с хорошей точностью выполняется уравнение Релея (I.1.13):

$$(U-C)(v''-\alpha^2v)-U''v=0,$$

из которого следует вещественность решения в нейтраль-

Таблица 8

Характеристики устойчивости течения Пуазейля в продольном магнитном поле

Ha	$R_*$	$\alpha_*$	$R_H$	$\alpha_H$	$I$
0,0	5 772	1,02	2 450	1,25	0,160
12,6	8 200	0,97	7 550	1,01	0,041
16,1	9 500	0,95	9 430	0,97	0,026
21,0	11 800	0,93	11 800	0,93	0
27,0	14 100	0,83	14 100	0,89	0

ном случае и равенство нулю напряжений Рейнольдса. Говоря точнее, из уравнения Релея выводится равенство

$$\tau' \equiv J^2/R \cdot (v_r \theta_r - v_i \theta_i) = 0,$$

откуда вследствие условий симметрии на оси следует, что  $\tau \equiv 0$  в невязкой зоне. При этом пульсационные компоненты  $v_x$  и  $v_y$ , будучи немалыми по амплитуде, сдвинуты по фазе на угол  $\pi/2$ , что и приводит к нулевому значению  $\tau = v_x v_y$ . Такая «незацепленность» пульсаций связана с неучетом нелинейного взаимодействия в ядре течения, которое обеспечивается членом  $K_k$  в уравнении (1), порождающим эффективную диссипацию в результате передачи энергии от крупных масштабов к мелким.

Важно отметить, что в пристенной области, где имеются большие градиенты как средней скорости, так и амплитуд пульсаций, основной вклад в диссипацию энергии определяется непосредственно вязким механизмом, поэтому неучет каскадного процесса здесь менее заметен. Это приводит к тому, что в пристенной зоне результаты расчета значительно лучше согласуются с опытом, чем в ядре потока. Данное обстоятельство непосредственно следует из рис. 73 и будет в дальнейшем использовано для автономного приближенного расчета турбулентного потока в пристенной зоне.

Желание устранить основной недостаток моногармонических колебаний — их «незацепленность» в ядре потока — вызывает к жизни различные попытки их искусственного «зацепления», одна из которых излагается в следующем параграфе.

## § 7. МОДЕЛЬНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ СО СДВИГОМ ФАЗ

Введем двухточечную по однородным координатам корреляционную функцию  $S(\gamma) = v_x(\vartheta) v_y(\vartheta + \gamma)$ , где  $\vartheta = \alpha x - Ct$  — фаза колебаний, а  $\gamma$  — сдвиг этой фазы, обусловленный различием временной или продольной

пространственной координаты. Для гармонических колебаний

$$RS(\gamma) = J^2 [(v_i v_r' - v_r v_i') \cos \gamma + (v_r v_r' + v_i v_i') \sin \gamma]. \quad (1)$$

В ядре течения в силу вещественности решения уравнения Релея имеем

$$2RS(\gamma) = J^2 \sin \gamma (v^2)'. \quad (2)$$

При  $\gamma=0$  корреляционная функция  $S(\gamma)$  совпадает с напряжением Рейнольдса  $\tau$  и в силу (2) в ядре потока обращается в нуль.

До сих пор мы рассматривали модель детерминированных колебаний. Внесем теперь элемент случайности, полагая, что фаза колебаний является случайной функцией времени, причем для компонент скорости  $v_x$  и  $v_y$  она различна. Другими словами, рассматривается ансамбль гармонических колебаний, параметром которого служит фаза колебаний, причем предполагается, что средний сдвиг фаз  $\gamma$  отличен от нуля.

Поскольку в ядре потока турбулентное напряжение трения совпадает с полным, за которым мы сохраним обозначение  $\tau$ , согласно (2) получим  $\tau \sim (v^2)'$ , или

$$v = A \sqrt{\int_y^1 \tau dy}. \quad (3)$$

Пределы интегрирования выбраны так, чтобы при  $y=1$  сохранилось условие непроницаемости  $v(1)=0$ . Тем самым мы простираем ядро течения вплоть до стенки, на которой задается напряжение трения  $v_*^2$ , но не ставится условие прилипания ни по пульсационной, ни по средней скорости.

Множитель  $A$  зависит от фазового сдвига  $\gamma$ , но его величина в дальнейшем не существенна, лишь бы  $A \neq 0$ .

Функция  $\tau(y)$  определяется динамическими уравнениями, в частности, для канала  $\tau=y$ , если, как и раньше, за масштаб скорости принять величину  $v_*$ . В таком случае уравнение Релея, если в него подставить (3) (при

этом  $A$  сократится!), может служить для определения профиля средней скорости  $U(y)$ . Анализ показывает, что функция  $U(y)$  как решение уравнения Релея не имеет точек перегиба только в случае  $\alpha=0$ . Тогда

$$U = C + B_1 v = C + B \sqrt{\int_y^1 \tau dy}. \quad (4)$$

Значение  $\alpha=0$  не должно обескураживать, так как, во-первых, перенос импульса в ядре действительно осуществляется крупномасштабными пульсациями, во-вторых, для  $R=\infty$  в классическом случае нейтральность достигается при  $\alpha=0$  и, в-третьих, опыт численных расчетов свидетельствует, что для течений в канале и пограничном слое соотношение  $v \sim U - C$  выполняется с хорошей точностью в ядре течения вплоть до значений  $\alpha \sim 1$ .

Перейдем к координате  $y_1 = 1 - y$ , отсчитываемой от стенки, как это обычно принято в теории пристенной турбулентности, и представим (4) в виде закона «дефекта скорости»

$$(U_{\max} - U)/v_* = D \sqrt{\int_{y_1}^1 \tau dy_1}. \quad (5)$$

Постоянная  $D$  зависит от пристенной части течения и не может быть определена в рамках невязкой задачи, поэтому величину  $D$  будем рассматривать как эмпирическую константу.

Для течения в плоском канале  $\tau = 1 - y_1$  и формула (5) дает

$$(U_{\max} - U)/v_* = D(1 - \sqrt{2y_1 - y_1^2}). \quad (6)$$

На рис. 75 сопоставляется формула (6) с опытными данными [110] при специально подобранном значении  $D$ . За исключением узкой пристенной зоны, на 97% ширины канала аппроксимация (6) вполне удовлетворительна.

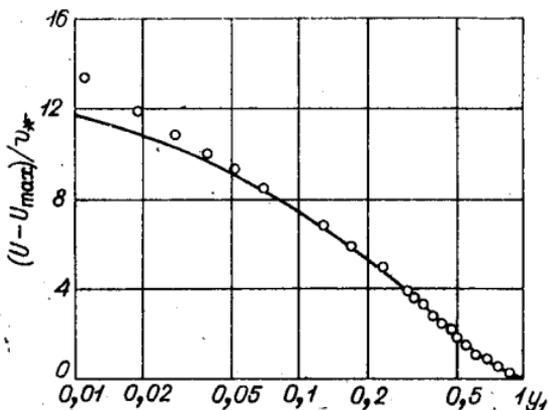


Рис. 75.

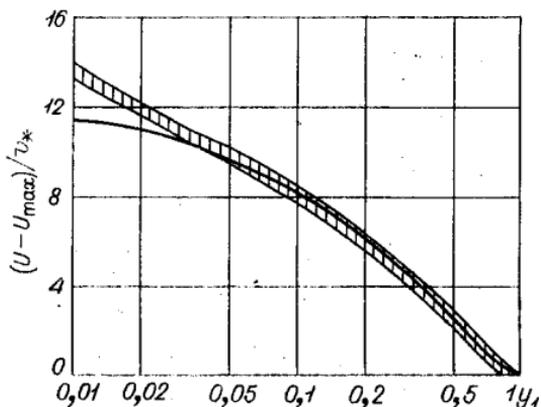


Рис. 76.

Для течения в пограничном слое касательное напряжение приближенно аппроксимируется формулой  $\tau = 1 - y^2$ , тогда из (5) получается

$$(U_{\max} - U)/v_* = D[1 - \sqrt[1/3]{4y - y^3}]. \quad (7)$$

Сравнение профиля (7) с опытными данными [229] показано на рис. 76. Как для канала, так и для пограничного слоя экспериментально подбираемая константа  $D \approx 13$ .

Таким образом, весьма простой модельный подход позволяет прийти к удовлетворительной полуэмпирической зависимости (5) с одной определяемой из опыта константой. Значение этого результата становится понятным, если учесть, что в настоящее время не существует полуэмпирической теории, приемлемо описывающей закон дефекта скорости в ядре потока, и авторы руководств [163, 229, 239] приводят чисто эмпирические интерполяционные формулы.

В связи с полученными результатами представляет интерес проследить, каким образом учет сдвига фаз между компонентами скорости  $u_x$  и  $u_y$  может сказаться на характеристиках нелинейной устойчивости при конечных числах Рейнольдса, если в уравнении Рейнольдса заменить  $\tau$  на  $S$  и величину  $\gamma$  считать свободно варьируемым параметром.

Результаты расчетов для различных значений  $\gamma$  отражены на рис. 77. Сплошные кривые представляют собой огибающие зависимостей  $I(R)$  для различных  $\alpha = \text{const}$  (см. рис. 71, б), т. е. контур проекций нейтральной поверхности на плоскость  $(R, I)$ . Наиболее резко нелинейное критическое число Рейнольдса изменяется при  $|\gamma| < 0,05$ . С увеличением  $\gamma$  от 0 до  $\pi/2$  критическое число Рейнольдса уменьшается с 1634 до 250—300, а затем вновь увеличивается,

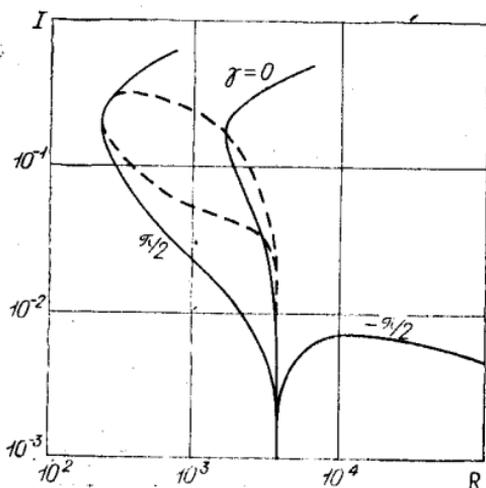


Рис. 77.

достигая при  $\gamma = \pi + 0,05$  значения 3848, соответствующего линейной теории. Это означает, что в диапазоне  $-\pi + 0,05 \leq \gamma \leq -0,05$  возбуждение вторичного режима является мягким, как это иллюстрирует кривая  $\gamma = -\pi/2$  на рис. 77. При  $\gamma = -\pi/2$  максимально возможная энергия автоколебаний минимизируется, но профили скорости слабо отлича-

ются от ламинарного случая. Опытные данные о турбулентных течениях [110] свидетельствуют, что величина  $\overline{v_x v_y} / \sqrt{\overline{v_x^2 v_y^2}} = \cos \gamma \simeq 0,4$ . Учет этого эмпирического факта в рамках рассматриваемой модели с искусственным зацеплением дает величину нелинейного критического числа Рейнольдса, согласующуюся с опытными данными. Однако верхним ветвям кривых на рис. 77, призванным моделировать турбулентный режим, при  $\gamma > 0$  отвечают нереально большие значения энергии колебаний. По-видимому, данный метод зацепления проходит лишь при очень больших числах Рейнольдса. Кроме того, нас, в принципе, не может удовлетворить полуэмпирический подход. Поэтому необходимо перейти к следующему приближению, учитывающему нелинейное взаимодействие пульсаций.

### § 8. РЕЗОНАНСНОЕ ТРЕХГАРМОНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

После моногармонического приближения казалось бы естественным в качестве следующего шага рассмотреть сумму двух гармонических колебаний. Однако если ограничиться двумя гармониками, то, несмотря на удвоение порядка системы и количества параметров, существенно новых эффектов не получится. Действительно, разыскивая пульсационные скорости в виде

$$v_k = \text{Re} [v_{k1}(y) \exp(i\alpha_1 x + i\beta_1 z - i\alpha_1 C_1 t) + v_{k2}(y) \exp(i\alpha_2 x + i\beta_2 z - i\alpha_2 C_2 t)], \quad (1)$$

подставляя это выражение в уравнение (6.1) и проектируя его на взятые базисные гармоники, мы обнаружим, что нелинейный член  $K_k$  не даст вклада в амплитудные уравнения, если исключить из рассмотрения неинтересный для нас случай  $k_2 = 2k_1$ . Следовательно, каждая из амплитуд будет удовлетворять уравнениям типа Орра — Зоммерфельда, и гармоники будут взаимодействовать только через уравнения Рейнольдса (6.2). Отсюда сразу следует, что все дефекты, свойственные моногармониче-

скому подходу, сохраняются. В силу того, что в ядре течения каждая из амплитуд будет удовлетворять уравнению Рейля, напряжения Рейнольдса по-прежнему останутся нулевыми и, следовательно, нет никакой надежды с помощью двухгармонической модели правильно аппроксимировать турбулентное течение в ядре потока. Более того, можно показать, что уже найденное максимально устойчивое моногармоническое решение таковым и останется в двухгармоническом случае. Рассмотрим двухгармонические колебания, отвечающие от течения Пуазейля, соответствующие двум точкам нейтральной кривой при  $R = \text{const}$  (например,  $R = 10^4$ , см. рис. 71, *b*). Из соображений непрерывности следует, что при малой энергии эти гармоники будут отвечать верхней и нижней ветвям нейтральной кривой для профиля скорости, порожденного совокупностью данных пульсаций. Постепенно увеличивая энергию, мы либо при каждом ее значении будем иметь аналогичную картину, либо при некоторой величине энергии точки на противоположных ветвях нейтральной кривой сольются и задача сведется к уже разобранному максимально устойчивому моногармоническому случаю. Таким образом, двухгармонические колебания либо неустойчивы к возбуждению новой степени свободы, либо моногармоничны.

В силу сказанного двухгармонический режим не представляет существенного интереса, поэтому перейдем к трехгармоническим колебаниям, которые представим в форме

$$v_n = 2\text{Re} \sum_{j=1}^3 v_{nj}(y) \exp i(\alpha_j x + \beta_j z - \alpha_j C_j t). \quad (2)$$

Как уже было сказано в § 5 настоящей главы, если набор волновых параметров произволен, то нелинейный оператор  $K_n$  после проектирования на базисные гармоники также не даст вклада в уравнения для амплитуд,

Этого не случится, если действуют соотношения

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0; \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0, \quad \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 = 0. \quad (3)$$

Согласно условиям (3), оператор  $K_n$ , вычисленный для любой пары гармоник, после проектирования даст вклад

в амплитудные уравнения для третьей гармоники, тем самым будет осуществлено прямое нелинейное взаимодействие рассматриваемых колебаний.

Обозначим для краткости  $\theta_j = \alpha_j x + \beta_j z - \alpha_j C_j t$  и рассмотрим порождаемые оператором  $K_k$  члены, соответствующие взаимодействию второй и третьей гармоник:

$$K_k^{2,3} = \partial/\partial x_m [(v_{k2} e^{i\theta_2} + v_{k2}^* e^{-i\theta_2})(v_{m3} e^{i\theta_3} + v_{m3}^* e^{-i\theta_3})].$$

Представляют интерес лишь члены, дающие вклад при проектировании на первую гармонику, т. е. содержащие множитель  $e^{-i(\theta_2 + \theta_3)}$ , который в силу условий (3) равен  $e^{i\theta_1}$ . Симметризуя по индексам 2 и 3, получим

$$K_k^{2,3} = \partial/\partial x_m [(v_{k2}^* v_{m3}^* + v_{k3}^* v_{m2}^*) e^{i\theta_1}]. \quad (4)$$

Если первая гармоника является нейтральным колебанием малой амплитуды, то  $K_k^{2,3}$  можно рассматривать как внешнюю силу, действующую на резонансной для первой гармоники частоте. Из теории колебаний известно, что наличие такой силы, воздействующей на линейный осциллятор, приводит к появлению секулярных членов вида  $te^{i\omega t}$ . Отсюда следует, что малые колебания, нейтральные по линейной теории, будут увеличивать свою амплитуду вследствие нелинейных резонансных взаимодействий. Эти нелинейные эффекты могут быть доминирующими уже при весьма малых значениях амплитуд. В главе II было показано, что инкременты роста возмущений, даваемые линейной теорией, весьма невелики. Так, для течения Пуазейля в канале максимально возможное значение инкремента составляет величину порядка одной сотой (в масштабе частоты, построенной по средней расходной скорости и полуширине канала), а с ростом числа Рейнольдса инкременты любых возмущений стремятся к нулю. В этих условиях основным механизмом, вызывающим быстрый рост возмущений, служит нелинейное резонансное взаимодействие.

Особые свойства трехгармонического взаимодействия широко используются в нелинейной теории колебаний (нелинейные акустика и оптика, поверхностные волны,

плазма) [88, 94]. Общий анализ резонансных триплетов для систем гидродинамического типа проведен в монографии [79]. В теории гидродинамической устойчивости резонансные взаимодействия, по-видимому, впервые были учтены в работах Раэца [493, 494]. Эти идеи нашли отражение в обзоре Стюарта [542], а в последние годы появился ряд работ Крейка [300—302, 557, 558], посвященных разработке резонансной теории неустойчивости. Резонансное взаимодействие гармоник на начальном этапе развития возмущений учитывалось и в работах [44—46, 80, 89, 90, 380, 510]. Следует, однако, отметить, что во всех указанных работах резонансное взаимодействие изучалось в приближении конечных, но малых колебаний в рамках уравнений типа Ландау для амплитуд возмущений. Рассматривался начальный этап развития пульсаций (при таком подходе опять наблюдался «взрыв», когда за конечный промежуток времени энергия обращалась в бесконечность), либо анализировалось резонансное взаимодействие с внешней вынуждающей силой или внешними постоянно действующими возмущениями<sup>1</sup>.

Отличительной чертой излагаемого здесь подхода является исследование собственных стационарных автоколебаний произвольной амплитуды, которые получаются как решения нелинейной задачи на собственные значения. Триpletное резонансное взаимодействие — следующая ступень эскалаторной схемы учета нарастающего числа возбужденных степеней свободы (см. § 5 настоящей главы), причем моногармоническая модель — частный случай триплета, у которого только одна из трех амплитуд колебаний отлична от нуля. Триplet может ответвляться как от исходного ламинарного режима, так и от моногармонических автоколебаний. В книге [79] галеркинский метод аппроксимации уравнений Навье — Стокса и схема Ландау для каскада неустойчивостей в определенной мере противопоставлены друг другу, а их

<sup>1</sup> Другой подход, учитывающий в рамках схемы идеальной жидкости сильное нелинейное взаимодействие и анализирующий при помощи модели дискретных вихрей установление турбулентного режима, развит в работах Белоцерковского и Ништа [14].

взаимосвязь отмечается лишь в смысле возможности использования метода Галеркина для расчета собственных функций линейной задачи гидродинамической устойчивости, необходимых для построения уравнений типа Ландау. В настоящей работе эти два подхода составляют единое целое. Метод проектирования используется для сведения проблемы к системе нелинейных дифференциальных уравнений, решением задачи на собственные значения для которых и реализуется очередной шаг в схеме Ландау.

Следует еще раз подчеркнуть, что в отличие от традиционного подхода, когда в уравнении Ландау амплитуды рассматриваются как функции времени, здесь изучаются стационарные автоколебания, амплитуда которых служит искомой функцией неоднородных координат, например поперечной координаты  $y$  для плоскопараллельных течений.

Используя выражение (4), нетрудно выписать уравнения для амплитуд триплета. В частности, для первой гармоники они имеют вид

$$\begin{aligned}
 i\alpha_1(U - C_1)u_1 + U'v_1 + i\alpha_1\rho_1 - 1/R \cdot (u_1'' - k_1^2u_1) &= \\
 = -2i\alpha_1u_2^*u_3^* - (u_2^*v_3^* + u_3^*v_2^*)' - i\beta_1(u_2^*\omega_3^* + u_3^*\omega_2^*); \\
 i\alpha_1(U - C_1)v_1 + \rho_1' - 1/R \cdot (v_1'' - k_1^2v_1) &= -i\alpha_1(v_2^*u_3^* + \\
 + v_3^*u_2^*) - 2(v_2^*v_3^*)' - i\beta_1(v_2^*\omega_3^* + v_3^*\omega_2^*); \quad (5) \\
 i\alpha_1(U - C_1)\omega_1 + i\beta_1\rho_1 - 1/R \cdot (\omega_1'' - k_1^2\omega_1) &= \\
 = -i\alpha_1(\omega_2^*u_3^* + \omega_3^*u_2^*) - (\omega_2^*v_3^* + \omega_3^*v_2^*)' - 2i\beta_1\omega_2^*\omega_3^*; \\
 i\alpha_1u_1 + i\beta_1\omega_1 + v_1' &= 0; \quad u_1 = v_1 = \omega_1 = 0 \text{ при } y = \pm 1.
 \end{aligned}$$

Амплитудные уравнения для второй и третьей гармоник получаются из (5) с помощью циклической перестановки индексов 1, 2, 3.

Уравнение Рейнольдса (6.2) для средней скорости запишется как

$$U' = R(u_1v_1^* + u_1^*v_1 + u_2v_2^* + u_2^*v_2 + u_3v_3^* + u_3^*v_3 - \lambda_0 y). \quad (6)$$

Подсчитаем число параметров, подлежащих определению в качестве собственных значений. Полным набором параметров, входящих в амплитудные уравнения, является совокупность  $\alpha_1, \beta_1, C_1; \alpha_2, \beta_2, C_2; \alpha_3, \beta_3, C_3; R$ . Резонансные соотношения уменьшают число независимых параметров на три. Если амплитуды второй и третьей гармоники положить равными нулю, то нетривиальное (моногоармоническое) решение существует при условии, что  $C_1$  выбрано специальным образом при произвольном задании  $\alpha_1, \beta_1, R$  из некоторой области их изменения. Амплитуда колебаний также находится. Еще одна связь налагается требованием нетривиальности решения для следующей гармоники. Но если амплитуды двух гармоник отличны от нуля, то третья однозначно определяется из системы неоднородных уравнений типа (5).

Таким образом, из совокупности десяти параметров пять могут быть выбраны произвольно из некоторой области их изменения, а остальные пять определяются из трех условий резонанса (3) и двух условий нетривиальности решения.

Система амплитудных уравнений допускает определенные группы преобразований. Если при некотором наборе параметров существует решение  $u_{k1}, u_{k2}, u_{k3}$ , то решением будет также  $u_{k1} e^{i\vartheta_1}, u_{k2} e^{i\vartheta_2}, u_{k3} e^{i\vartheta_3}$ , где  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  — вещественные числа, связанные соотношением  $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = 0$ . Следовательно, постоянные фазовые множители у двух гармоник могут быть заданы произвольно, и это не изменяет профиля средней скорости  $U(y)$ , что непосредственно следует из (6). Более того, легко видеть, что от выбора фаз  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  не зависят любые моменты. Заметим, что хотя с увеличением числа степеней свободы  $n$  произвол в выборе фаз будет возрастать, для решений, отличающихся лишь фазами, все средние величины по-прежнему будут совпадать. Если существует решение при некотором наборе волновых чисел  $\alpha_j, \beta_j$ , то решением будет и  $u_j$  при волновых числах  $-\alpha_j, -\beta_j$ . Допустимо также преобразование  $\beta_j \rightarrow -\beta_j$  и  $\omega_j \rightarrow \omega_j$ . При заданном значении  $R$  каждому нетривиальному решению может соответствовать совокупность трех точек на плоскости  $(\alpha, \beta)$ . В силу сказанного тройки точек, симметрично расположенные относитель-

но осей  $\alpha=0$  и  $\beta=0$ , также будут соответствовать нетривиальным решениям.

Следствием уравнений Рейнольдса для параллельных течений является требование

$$\overline{v_y v_z} = 0. \quad (7)$$

Для произвольной триады косых волн (2) это требование не выполняется. Оно может быть удовлетворено с помощью решений типа (6.3) в виде совокупности стоячих волн. В полной счетной сумме, представляющей собой общее решение со счетным числом степеней свободы, каждому слагаемому с волновым числом  $\beta$  соответствует слагаемое с волновым числом  $-\beta$ , имеющее с точностью до фазового множителя такую же амплитуду. Такие решения, не являясь в общем случае стоячими волнами, автоматически удовлетворяют соотношению (7). Поэтому, реализуя каскадный процесс, следует рассматривать либо стоячие волны, либо совокупность бегущих волн с волновыми числами  $\beta$  и  $-\beta$ . В последнем случае число гармоник удваивается, но вследствие отмеченной выше симметрии по  $\beta$  число амплитудных уравнений и их вид не изменяются.

Уравнение Рейнольдса (6) тоже не изменяется, если учесть, что полные рейнольдсовы напряжения формируются в результате суммирования волн, имеющих волновые числа  $\beta$  и  $-\beta$ , и если вследствие этого удвоить нелинейные слагаемые (в том числе и внутри функционала  $\lambda_0$ ).

Отметим, что для выполнения (7) возможен альтернативный квазистатистический подход, заключающийся в получении решений типа (2), каждое из которых удовлетворяет системе (5) — (6) и не удовлетворяет условию (7), и в составлении «ансамбля» из двух таких решений, отвечающих положительному и отрицательному значению  $\beta$ . Полагая, что операция усреднения включает дополнительно суммирование по этому ансамблю с равным весом, мы удовлетворим условие (7) в среднем. Впрочем, на этом пути возникает та трудность, что для определения отдельных «реализаций» необходи-

мо использовать среднее, входящее в уравнение Рейнольдса.

Сходные затруднения возникают из-за необходимости при течении в канале получить симметричный относительно оси профиль средней скорости  $U(y)$ , так как решения системы (5) не обеспечивают требуемой симметрии. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим трехгармонические колебания с бесконечно малой энергией. Тогда нелинейные члены в (5) и (6) можно отбросить и каждая гармоника должна стать нейтральным колебанием в рамках линейной теории. Ниже будет показано, что такие тройки нейтральных решений, удовлетворяющие резонансным условиям (3), действительно существуют. Но нейтральные колебания течения Пуазейля обладают определенными свойствами симметрии относительно оси канала, а именно функция  $v(y)$  является симметричной, а  $u(y)$  и  $w(y)$  — антисимметричными. Такие решения порождают антисимметричные напряжения Рейнольдса, что и соответствует симметричному профилю средней скорости. Но элементарный анализ уравнений (5) показывает, что в нелинейном случае решения с подобной симметрией недопустимы. Следовательно, резонансные триплеты, ответвляющиеся от плоскопараллельного решения, при конечной энергии колебаний не обладают симметрией, значит, в общем случае они порождают несимметричные стационарные добавки к исходному профилю скорости. Отметим, что точные автоколебательные решения уравнений Навье — Стокса (см. § 2—4 наст. главы) также не имели в целом свойств симметрии, но поскольку каждая из амплитуд, составляющих решение гармоник, обладала свойствами симметрии или антисимметрии, то эффекта асимметрии среднего течения не возникало.

Симметрию средних характеристик можно восстановить, если учесть, что каждому асимметричному решению соответствует его «зеркальное отражение», поскольку система (5) — (6) допускает преобразование  $y \rightarrow -y$ ,  $v_j \rightarrow -v_j$ . Если считать, что общее решение содержит сумму обеих таких компонент, то в (6) их надо учесть совместно, а уравнения (5) рассматривать как определяющие одну из этих компонент. Если угодно, эту операцию также можно трактовать, как усреднение по ан-

самблю из двух реализаций. Впрочем, не исключено, что асимметричные решения могут оказаться наиболее устойчивыми и реализоваться в физическом эксперименте, как, например, при течении в диффузоре, тогда как в других случаях максимально устойчив, вероятнее всего, симметричный режим.

Следует отметить, что система (5), как и точные уравнения Навье — Стокса, допускает другой вид симметрии, когда  $u_j(y)$  и  $w_j(y)$  — симметричные функции, а  $v_j(y)$  — антисимметричная. Возможны и другие варианты, например функции  $v_1(y)$  — антисимметрична, а  $v_2(y)$  и  $v_3(y)$  симметричны. Однако априори неясно, существуют ли решения такого типа. Если решения с симметрией смешанного типа, в принципе, могут ответвляться от симметричных моногармонических колебаний, то решения с антисимметричными  $v_j$  не ответвляются ни от исходного ламинарного течения Пуазейля, ни от рассмотренных выше моногармонических колебаний. Тем не менее их существование не исключено.

В главе II при анализе устойчивости течения Гартмана было показано, что при  $Na > 6$  нейтральная кривая существует и для антисимметричных собственных функций. От такой нейтральной кривой могут ответвляться как моногармонические колебания, так и триплеты, обладающие симметрией относительно оси канала. Их можно было бы получить предельным переходом при  $Na \rightarrow 0$ . Здесь возможны два случая: либо соответствующая нейтральная поверхность «убегает» в область бесконечно больших чисел Рейнольдса, либо она «повисает» под плоскостью  $I=0$ , нигде ее не пересекая. Так или иначе, вопрос о существовании автоколебаний с антисимметричными  $v_j$  еще ждет своего решения. Вообще необходимо отметить, что численный расчет нелинейных трехгармонических колебаний — сложная и весьма трудная задача вследствие большого порядка системы нелинейных уравнений (в общем случае — 38) с малыми параметрами при старших производных, необходимости решать задачу на собственные значения и наличия пяти свободных параметров. Эта проблема находится сейчас на начальной стадии своего решения, и ее изложение в рамках настоящей работы не дается. Мы огра-

начимся лишь рассмотрением частного вопроса об ответвлении резонансных триплетов от исходного ламинарного режима.

Если известны характеристики нейтральных колебаний по линейной теории устойчивости, то задача о ветвлении триплетов может быть решена без каких-либо дополнительных численных расчетов при помощи графического построения.

Как будет ясно из дальнейшего, важным частным примером трехгармонического резонансного взаимодействия является симметричный триплет, в котором волновые числа двух входящих в триплет гармоник равны. В силу симметрии относительно оси  $\alpha=0$ , не нарушая общности, можно считать, что  $\alpha_2=\alpha_3=-\alpha_1/2$ , тогда  $C_1=C_2=C_3$ . В главе II показано, что в условиях справедливости теоремы Сквайра  $C=f(\alpha^2+\beta^2)$ , откуда с учетом равенств  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  следует, что  $\beta_2=-\beta_3$ , а  $\beta_1=0$  согласно резонансному условию (3). Таким образом, если при каком-нибудь числе Рейнольдса существует резонансный триплет, то его параметры описываются матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & C \\ -\alpha/2 & \beta & C \\ -\alpha/2 & -\beta & C \end{pmatrix}, \quad (8)$$

каждая строчка которой соответствует одной из гармоник. Так как все нейтральные колебания удовлетворяют

зависимостям  $C=C(\alpha R)$  и  $k=\sqrt{\alpha^2+\beta_2^2}=k(\alpha R)$ , то графическое определение точки ветвления резонансного триплета сводится к следующему. На рис. 78 показаны зависимости  $C(\alpha R)$  и  $k(\alpha R)$  в районе носика нейтральной кривой для течения Блазиуса. Точки на нейтральной кри-

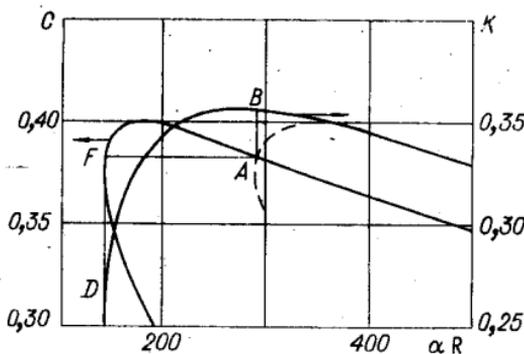


Рис. 78.

вой симметричного триплета должны отвечать одному и тому же значению  $C$ , следовательно, они могут лежать только на прямой  $C = \text{const}$ . Поскольку число Рейнольдса  $R$  фиксировано, то из матрицы (8) следует, что если первой строчке отвечает абсцисса  $\alpha R$  на рис. 78, то второй и третьей  $-1/2 \alpha R$ , причем в силу симметрии относительно оси  $\alpha = 0$  знак роли не играет. Переносим переднюю часть кривой  $C(\alpha R)$  в точки с удвоенным значением аргумента, получаем на рис. 78 пунктирную линию, пересечение которой с исходной кривой определяет искомые параметры  $C$  и  $\alpha R$  первой гармоники симметричного триплета. Им соответствует точка А. Величину волнового числа  $\alpha$  найдем, проведя из точки А вертикаль до пересечения в точке В с соответствующей (верхней) ветвью кривой  $k(\alpha R)$ , поскольку для первой гармоники  $\beta = 0$  и  $\alpha = k$ . Параметр  $\beta$  определяется, если провести из точки А горизонталь  $AF$ , на которой  $C = \text{const}$ , и вертикаль  $FD$  до пересечения с соответствующей ветвью зависимости  $k(\alpha R)$ . Значение  $\beta$  вычисляется по формуле  $\beta = \sqrt{k^2 - \alpha^2}/4$ , где  $k$  определено точкой пересечения  $D$ , а  $\alpha$  уже найдено.

Рассчитанные в результате такого построения параметры ветвления симметричного триплета от течения Блазиуса следующие:

Гармоника	$\alpha$	$\beta$	$C$
I	0,356	0	0,383
II	-0,178	1,19	0,383
III	-0,178	-1,19	0,383

(9)

Минимальное число Рейнольдса, при котором происходит ветвление трехгармонических колебаний,  $R = 818$ .

При больших значениях  $R$  ответвляются несимметричные триплеты, у которых все  $\beta \neq 0$ , причем для каждого  $R$  на плоскости  $(\alpha, \beta)$  существует пара точек ветвления, симметричная относительно оси  $\beta = 0$ .

Существенно отметить трехмерность триплетов, ответвляющихся от ламинарного режима, а также то об-

стоятельство, что значение  $R=818$  значительно превосходит критическое число Рейнольдса для течения Блазиуса  $R_* = 519$ . Полученные данные находятся в качественном согласии с результатами эксперимента [414].

При естественном переходе в пограничном слое развитию турбулентного режима предшествует трехмерная структура продольных вихрей с  $\beta \approx 0,22$  и  $C = 0,3-0,6$ . Хотя такое явление наблюдается при довольно значительных интенсивностях ( $\approx 1 \div 2\%$ ), и при  $R = 2000-3000$ , но оно развивается гораздо раньше, что отчетливо видно при возбуждении колебаний с помощью вибрирующей ленты. Приведенные результаты дают основание предполагать, что наблюдаемая трехмерная структура в пограничном слое индуцируется нелинейным резонансным трехгармоническим взаимодействием.

О ведущей роли резонансного трехгармонического взаимодействия в предпереходной области пограничного слоя свидетельствуют и экспериментальные данные [37]. При воздействии внешнего акустического поля заданной частоты интенсивность пульсаций скорости имеет два резких максимума — в районе основной частоты, соответствующей верхней ветви нейтральной кривой, и половинной. Это согласуется со структурой резонансного триплета (8), которая указывает на сильное нелинейное взаимодействие гармоник с основной и половинной частотой.

Вполне аналогичные построения и расчеты для течения Пуазейля в канале дают следующие результаты:

$$R = 7776 (R_* = 3848)$$

Гармоника	$\alpha$	$\beta$	$C$
I	1,088	0	0,3586
II	-0,544	0,709	0,3586
III	-0,544	-0,709	0,3586

(10)

На рис. 79 нанесены линии ответвления триплетов от течения Пуазейля в проекции на плоскость  $(\alpha, R)$ . Линия 5 отвечает классической нейтральной кривой, линия 4 — контур нейтральной поверхности в пространстве

$(\alpha, \beta, R)$  в проекции на плоскость ( $\beta=0$ ). Точки  $A$  и  $B$  отвечают симметричному триплету (10), причем обе гармоники II и III проектируются в точку  $B$ . С увеличением  $R$  гармоникам I—III соответствуют кривые 1—3.

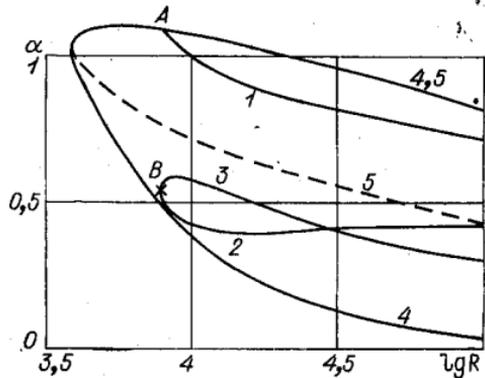


Рис. 79.

Тот факт, что симметричный триплет отвечается от ламинарного течения при минимальном числе Рейнольдса, выделяет его роль по сравнению с другими триплетами и в нелинейном анализе устойчивости вообще. Собственно говоря, как уже отмечалось, моногармоническое колебание тоже можно рассматривать как симметричный триплет, у которого основная гармоника — стационарное течение с волновым числом, равным нулю, а две другие отвечают волновым числам  $\alpha$  и  $-\alpha$ . В этом смысле триплет (10) можно считать составленным из триплетов предыдущего уровня, взаимодействующих между собой резонансным образом.

В связи с выделенной ролью симметричных триплетов выпишем систему определяющих уравнений, порядок которой существенно понижается (с 38 до 22). Поскольку предполагается, что  $\alpha_2 = \alpha_3$  и  $\beta_2 = -\beta_3$ , то  $u_2 = u_3$ ;  $v_2 = v_3$  и  $\omega_2 = -\omega_3$ . С учетом этого, обозначая линейные операторы в левых частях (5) через  $L_1, L_2, L_3$ , для амплитуд первой гармоники получим

$$L_1(u_1) = -2i\alpha_1 u_2^{*2} - 2(u_2^* v_2^*)';$$

$$L_2(v_1) = -2i\alpha_1 v_2^* u_2^* - 2(v_2^{*2})'; \quad (11)$$

$$i\alpha_1 u_1 + v_1' = 0.$$

Уравнения для амплитуд второй гармоники имеют вид

$$\begin{aligned}
 L_1(u_2) &= -2i\alpha_2 u_2^* u_1^* - (u_2^* v_1^* + u_1^* v_2^*)' - i\beta_2 \omega_2^* u_1^*; \\
 L_2(v_2) &= -i\alpha_2 (v_2^* u_1^* + v_1^* u_2^*) - 2(v_1^* v_2^*)' - i\beta_2 \omega_2^* v_1^*; \quad (12) \\
 L_3(\omega_2) &= -i\alpha_2 \omega_2^* u_1^* - (\omega_2^* v_1^*)'; \\
 i\alpha_2 u_2 + v_2' + i\beta_2 \omega_2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Уравнения для третьей гармоники совпадают с (12) с точностью до замены индекса 2 на 3. Уравнение Рейнольдса можно оставить в форме (6). В силу симметрии число параметров, входящих в систему, снижается до четырех ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $C$ ,  $R$ ), как и в моногармоническом случае, причем один из них, например  $C$ , определяется как собственный, а остальные в определенном диапазоне произвольны.

Надо отметить, что не для всякого течения симметричный триплет ответвляется от исходного режима. Приведенное выше построение оказалось возможным из-за петлеобразного вида кривой  $C(\alpha R)$ . Для течений с точками перегиба в профиле скорости она может не иметь такой формы. В этом смысле интересна струя Бикли — Шлихтинга.

Анализ ее нейтральных зависимостей, предпринятый в главе II, показывает, что при конечных числах Рейнольдса не существует условий для ответвления симметричного триплета. Однако при  $R \rightarrow \infty$  такой триплет могут составить колебания симметричной моды ( $\alpha=2$ ,  $C=2/3$ ,  $\beta=0$ ) и антисимметричные нейтральные возмущения ( $\alpha=\pm 1$ ,  $C=2/3$ ,  $\beta=0$ ). Такое «невязкое» ветвление связано с точкой перегиба в профиле скорости струи.

Хорошей иллюстрацией того, насколько трехмерность возмущений существенна для возникновения резонансных взаимодействий, является пример МГД-течений в плоском канале. Пусть внешнее магнитное поле параллельно стенкам. Тогда уравнение Орра — Зоммерфельда, описывающее поведение бесконечно малых возмуще-

ний, имеет вид

$$\begin{aligned} idR[(U-C)(\varphi''-k^2\varphi)-U''\varphi] = \\ = \varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi + Na^2(\alpha^2 H_x^2 + \beta^2 H_z^2)\varphi, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $H_x$  и  $H_z$  — косинусы углов между вектором напряженности магнитного поля и соответствующими осями.

В случае продольного поля ( $H_x=1$ ,  $H_z=0$ ) с ростом критерия  $Na$  наиболее опасными становятся трехмерные возмущения. Более того, область генерации при  $R \rightarrow \infty$  (см. рис. 17) останется той же самой, независимо от того наложено поле или нет, хотя при конечных  $R$  возмущения подавляются. Это связано с тем, что в случае, когда  $R \rightarrow \infty$ , а  $\alpha R = \text{const}$ , уравнение (13) совпадает с соответствующим уравнением для непроводящей жидкости, поскольку  $\alpha \rightarrow 0$ . Число Рейнольдса, при котором впервые возможно резонансное взаимодействие нейтральных колебаний, будет возрастать с увеличением  $Na$ , так как оно превосходит критическое значение, меняющееся по закону  $R_* = 525 Na$  при  $Na \gg 1$ .

Теперь рассмотрим трансверсальное поле ( $H_x=0$ ,  $H_z=1$ ). В этом случае поведение двумерных возмущений, и следовательно  $R_*$ , не зависит от  $Na$ . Трехмерные же возмущения будут подавляться магнитным полем. В частности, с ростом  $Na$  будет сокращаться к началу координат область генерации на рис. 17. Это приводит к тому, что число Рейнольдса, при котором возникает резонансное взаимодействие малых нейтральных возмущений, резко растет с числом  $Na$ . Расчеты показывают, что эта зависимость имеет вид

$$R \approx 10 Na^2 \quad (Na \gg 1).$$

Таким образом, трансверсальное магнитное поле подавляет не только трехмерные возмущения, но и сильное нелинейное взаимодействие генерирующих гармоник. Хотя эти результаты относятся лишь к малым возмущениям, они иллюстрируют, как воздействует магнитное поле на нелинейные механизмы производства и обмен пульсационной энергии. Если предположить, что эти эффекты справедливы и для пульсаций конечной амплитуды и пренебречь соответствующими нелиней-

ными членами в уравнениях для пульсаций, то получим вырожденный пульсационный режим, аналогичный тому, который был рассмотрен в § 6 данной главы.

Проблема аппроксимации турбулентности отличается от нелинейной задачи гидродинамической устойчивости, которая требует рассмотрения всех возможных возмущений, необходимостью специального выбора волновых чисел.

Следуя общей схеме, для выбора параметров проанализируем вопрос об устойчивости трехгармонических колебаний к возмущению следующей степени свободы. Для этого рассмотрим возмущенное движение, включающее четвертую гармонику малой амплитуды. Если параметры возмущающей гармоники совпадают с одной из основных, то возникает задача об устойчивости триплета по его амплитудам. В более общем случае после проектирования на возмущающую гармонику задача сводится к исследованию в рамках линейной теории устойчивости модельного плоскопараллельного течения с профилем скорости  $U(y)$ , определяемым данным триплетом, устойчивость которого изучается. В рамках такого анализа профиль  $U(y)$ , соответствующий фиксированному числу Рейнольдса, скорее всего, будет устойчивым. Это следует из тех эвристических соображений, что, во-первых, уже моногармоническое приближение вместо неустойчивого параболического профиля дало нейтрально устойчивый профиль и, во-вторых, экспериментальный турбулентный профиль в указанном смысле является глубоко устойчивым, как это показано в следующей главе. Если сказанное верно, то анализ устойчивости путем возбуждения еще только одной степени свободы дает не единственный устойчивый профиль, а целый набор профилей, среди которых выделенным будет «максимально устойчивый». Но для его определения возникает проблема выбора меры устойчивости и максимизации выбранного функционала. Эти вопросы обсуждаются в следующей главе.

Альтернативой поиска максимально устойчивого решения может быть анализ устойчивости к возбуждению большого числа степеней свободы. Пусть имеется семейство трехгармонических колебаний, устойчивое по от-

ношению к дополнительно возбуждаемой гармонике. Рассмотрим двухгармоническое возмущение. Если волновые числа этих гармоник произвольны, то вновь получается задача о квазиламинарной устойчивости фиксированного профиля. Иная ситуация возникает, если волновые числа возмущения связаны резонансным соотношением с одной из компонент триплета. В этом случае речь идет об устойчивости к возбуждению нового независимого триплета. Легко видеть, что в этом смысле любой данный режим будет нейтральным, поэтому, как и для моногармонических колебаний, требование устойчивости сводится к тому, чтобы решение соответствовало «носику» нейтральной поверхности триплетов.

Вопросы устойчивости связанных резонансных колебаний в целом требуют дальнейшей более подробной разработки.

## Глава V

### ПРИНЦИП МАКСИМАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Цель настоящей главы — попытка построения теории пристенной турбулентности, не содержащей эмпирических констант. Ее основой служит принцип максимальной устойчивости, позволяющий определить параметры пульсационного движения из некоторого класса или в простейшем случае непосредственно вычислить среднюю скорость турбулентного потока. Эта теория идейно связана с концепцией Кутателадзе [122] о консервативности некоторых основных характеристик пристенной турбулентности.

Принцип максимальной устойчивости в его общей формулировке, несомненно, имеет широкую сферу применения, однако конкретная его реализация пока удастся лишь в простейшем квазиламинарном приближении, которое пригодно в основном для пристенной турбулентности. Анализ имеющихся экспериментальных данных, упомянутые свойства консервативности и энергетическая классификация характерных масштабов в турбулентном потоке позволяют дать формулировку проблемы собственно пристенной турбулентности в виде автономной задачи Прандтля, приближенное решение которой удастся построить аналитическими средствами линейной теории гидродинамической устойчивости.

В силу изложенного анализ свойств устойчивости турбулентного потока целесообразно предварить необходимыми для дальнейшего краткими сведениями по пристенной турбулентности, включая новую энергетическую интерпретацию экспериментальных данных.

## § 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Специфическая особенность пристенной турбулентности — тесное взаимодействие вязкого и турбулентного переноса, так что при построении теории необходимо учитывать оба эти фактора.

В случае стационарной турбулентности уравнения Навье — Стокса сводятся к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_k v_j - \langle v_k v_j \rangle) = \\ = - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \nu \Delta v_k; \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$U_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_k} + \nu \Delta U_k - \frac{\partial \langle v_k v_j \rangle}{\partial x_j}; \quad \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $v_k$  и  $U_k$  — векторы пульсационной и средней скорости;  $p$  и  $P$  — пульсационное и среднее давления. Угловые скобки означают усреднение по ансамблю, которое обычно считают совпадающим с усреднением по времени или по другим однородным переменным. На твердых стенках в качестве граничных условий выбираются условия прилипания.

Соотношения (2) являются уравнениями Рейнольдса — основой всех полуэмпирических теорий. Обращаться к опыту приходится из-за незамкнутости уравнений (2), содержащих кроме первых моментов  $U_k$  и  $P$  неизвестный тензор напряжений Рейнольдса  $\tau_{kj} = -\langle v_k v_j \rangle$ . С помощью (1) можно построить уравнение для  $\tau_{kj}$ , но в него войдут третьи моменты. Продолжая этот процесс, получим известную цепочку Фридмана — Келлера [163], в которой, однако, число неизвестных растет значительно быстрее числа уравнений, поэтому на любом конечном шаге цепочка остается незамкнутой, не говоря уже о том, что использование многоточечных моментов ведет шаг от шага к увеличению числа независимых переменных.

Формально, переходя к пределу, можно прийти к замкнутой системе, которая записывается в виде одного символического уравнения для характеристического

функционала Хопфа, действующего в бесконечномерном пространстве. Это обстоятельство и проблема начальных условий делают задачу практически неразрешимой. Реально систему моментов замыкают с помощью разного рода эвристических гипотез при использовании опытных данных. Наиболее известен и эффективен подход, предложенный Прандтлем [490], который основан на аналогии молекулярного и молярного переноса. Формула Прандтля для турбулентного напряжения трения в одномерном турбулентном потоке имеет вид

$$\tau = l^2 |dU/dy| dU/dy, \quad (3)$$

где  $l$  — аналог длины свободного пробега, называемый длиной пути смещения.

Величина  $l$  сложным образом зависит от расстояния до стенки  $y$ , и обычно функция  $l = l(y)$  находится эмпирическим путем, однако существует область, не очень близкая к стенке, для того чтобы не влияла молекулярная вязкость, действующая вследствие условий прилипания, но и не очень далекая, чтобы не сказывались индивидуальные условия во внешней области, где верно соотношение

$$l = \kappa y. \quad (4)$$

Величина  $\kappa$  носит название константы Прандтля — Кармана и является основной эмпирической постоянной полуэмпирических теорий турбулентности.

Для одномерного безградиентного течения из (2) следует,

$$\tau = -\langle v_x v_y \rangle = \tau_0 = \text{const}, \quad (5)$$

где  $\tau_0$  — напряжение трения на стенке. В более общем случае функция  $\tau = \tau(y)$  задается в виде некоторой аппроксимации, чаще всего полиномиальной [126], параметры которой находятся путем использования уравнений (2).

В области, где действуют соотношения (4) и (5), из (3) следует логарифмический закон распределения скоростей

$$U = 1/\kappa \cdot \sqrt{\tau_0} \ln y + C_1. \quad (6)$$

Величина  $\sqrt{\tau_0} = v_*$  имеет размерность скорости и называется динамической скоростью.

Если предположить, что вблизи стенки движение не зависит от глобального масштаба потока, то все усредненные пристенные характеристики будут функцией безразмерной переменной

$$\eta = v_* y / \nu, \quad (7)$$

играющей роль местного числа Рейнольдса. Поэтому, например,

$$U/v_* = \varphi(\eta). \quad (8)$$

В частности, соотношение (6) может быть записано в виде

$$\varphi = 1/\kappa \cdot \ln \eta + C, \quad (9)$$

где  $\kappa$  и  $C$  — эмпирические постоянные, для которых в работах [122, 163] рекомендованы значения  $\kappa = 0,4$ ;  $C = 5,5$ . Наличие в пристенной области универсальной зависимости (8), не содержащей числа Рейнольдса, хорошо согласуется с опытными данными. Это демонстрирует рис. 80, заимствованный из работы [430]. Для течения в канале или в трубе вблизи оси симметрии универсальность нарушается, что сказывается на откло-

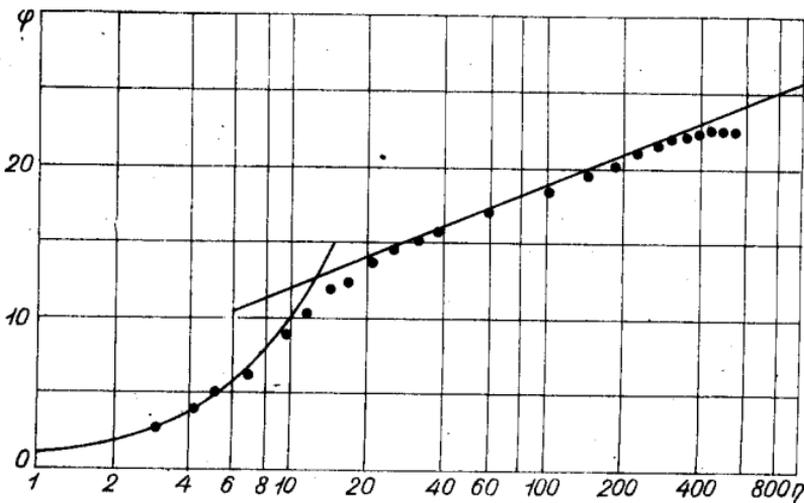


Рис. 80.

нении экспериментальных данных от логарифмической прямой. Однако при больших числах Рейнольдса это отклонение невелико и формула (9) применяется вплоть до оси в форме

$$(U_{\max} - U)/v_* = 1/\kappa \ln(h/y), \quad (10)$$

где  $h$  — характерный размер потока, например полуширина канала. Соотношение (10) носит название закона дефекта скорости. Оно справедливо и для пограничного слоя. Профиль (10) в ядре потока в канале близок к экспериментальному закону Дарси [304]

$$(U_{\max} - U)/v_* = 5,08(1 - y/h)^{3/2}. \quad (11)$$

В непосредственной окрестности оси или внешней границы пограничного слоя соотношение (10) нарушается, тем не менее распределение скорости в координатах  $(U_{\max} - U)/v_*$  и  $y/h$  остается универсальным. Подтверждением служит рис. 76, заимствованный из работы [229], где отражены данные, относящиеся к внешней части пограничного слоя. Вблизи внешней границы опытные данные хорошо описываются эмпирической формулой Хама

$$(U_{\max} - U)/v_* = 9,6(1 - y/h)^2, \quad (12)$$

где  $h$  — толщина пограничного слоя. Как отмечает Хинце [229], удовлетворительного решения задачи о внешней области в рамках полуэмпирических теорий найти не удалось. Правда, имеется модель Коулса [294], основанная на аналогии между течениями в этой области и в следе, но она содержит поправочную эмпирическую функцию.

Результаты, изложенные в § 7 главы IV, дают для рассматриваемой области течения первые полуэмпирические формулы.

Течение в канале в целом не обладает свойством универсальности.

Для течения в непосредственной окрестности стенки предложено много интерполяционных формул, которые при больших  $\eta$  переходят в (9), а при  $\eta \ll 1$  дают  $\varphi = \eta$ ,

что характерно для ламинарного течения. Наиболее употребительна формула Ван-Дриста [559], обобщающая (4),

$$l = \kappa y [1 - \exp(-\eta/A)], \quad (13)$$

где  $A$  — новая эмпирическая константа, примерно равная 30.

При  $y \rightarrow 0$  согласно (13)  $l \sim y^2$ , так что в соответствии с (3) для турбулентного трения в непосредственной окрестности стенки получается зависимость

$$\tau \sim y^4, \quad (14)$$

что согласуется с теорией [134].

По поводу «закона четвертой степени» (14) ведется непрекращающаяся дискуссия [49, 50, 93, 472].

Заметим, что соотношение (14) является точным в случае двумерной турбулентности. В самом деле, пусть в окрестности бесконечной прямолинейной стенки

$$v_x = a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \dots \quad (15)$$

Тогда согласно уравнению неразрывности  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

$$v_y = -a_1'(x)y^2/2 - a_2'(x)y^3/3 - \dots, \quad (16)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по  $x$ . Перемножая ряды (15) и (16) и усредняя их по  $x$ , вследствие того что  $\langle a_1 a_1' \rangle = 0$ , получим

$$\tau = -\langle v_x v_y \rangle = (a_1' a_2 + a_1 a_2') y^4 + \dots$$

В трехмерном случае нет столь жесткой связи между  $v_x$  и  $v_y$  и поэтому  $\tau \sim y^3$ , но, как показано далее в этой главе, практически разница между законами третьей и четвертой степени невелика.

В последние годы успешно развиваются полуэмпирические теории [55, 92, 132, 187], осуществляющие замыкание на уровне вторых моментов, получающихся в результате умножения (1) на  $v_j$ , симметризации и статистического усреднения. Этот подход основан на известных работах Колмогорова [106, 107] и Прандтля [491].

В ряде задач с успехом применяется модель Буссинеска с постоянной турбулентной вязкостью, определяемой из опыта [28]. Интересны попытки введения вязкости, зависящей от состояния движения, которая, принимая отрицательные значения, способствует генерации энергии пульсационного движения [253].

На основании экспериментальных фактов обнаруживается довольно сложная структура усредненного течения в пристенной области. В непосредственной окрестности стенки ( $\eta \leq 10$ ) выделяют вязкий подслой, где  $\varphi = \eta$ , хотя здесь существуют значительные пульсации скорости и трения [125]. Область  $10 \leq \eta \leq 30$  называют буферной зоной, выше которой лежит логарифмический участок, простирающийся на то или иное расстояние в зависимости от числа Рейнольдса. Над логарифмическим участком лежит внешняя область, где справедливо соотношение (12). При движении в пограничном слое выделяют еще одну, самую внешнюю, зону — «надслой», где течение носит перемежающийся характер [145].

Первые три области, составляющие зону универсальности в координатах ( $\eta, \varphi$ ), являются в известном смысле автономными, поскольку туда слабо проникают внешние воздействия. Это касается не только числа Рейнольдса внешнего потока, но и степени его турбулентности [81], а также формы канала. Свойство пристенного течения, точнее, свойство независимости пути смещения Прандтля  $l$  от возмущающих факторов, таких, как сжимаемость, неизотермичность, вдув или отсос и отчасти градиент давления, формулируется в работах [121—123] в виде закона консервативности пристенной турбулентности и широко используется в теории пограничного слоя с исчезающей вязкостью. Указанная классификация не формальная, а отражает основные физические черты пристенной турбулентности.

Хотя общепринятая классификация зон по свойствам среднего профиля скорости весьма наглядна, но очевидно и ее несовершенство. Поскольку масштабы зон этим способом указываются качественно, «на глаз», в научной литературе толщину, например, вязкого подслоя вычисляют в пределах  $4 \leq \eta \leq 10$ . Велик разброс и в определении других масштабов.

Покажем, что размеры динамических слоев могут быть определены вполне однозначно, исходя из простых физических соображений. Естественную основу для классификации дает уравнение пульсационной энергии, которое для одномерного в среднем течения имеет вид

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\overline{v_x v_y \varphi'} - \frac{\overline{\partial v_k}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial v_k}}{\partial x_j} - (\overline{p + E})' v_y + \bar{E}'' = 0;$$

$$E = 1/2 v_j^2. \quad (17)$$

Уравнение энергии широко используется при анализе турбулентных течений. Детальный его анализ был проведен Колмогоровым [107], физическую интерпретацию всех входящих в него членов можно найти в монографиях [23, 92, 163, 217]. Уравнение баланса энергии часто используют в различных гипотезах замыкания [132, 187], из последних работ, посвященных его анализу, укажем на [5, 268, 546].

Первый член (17) представляет собой локальную плотность генерации пульсационной энергии из среднего движения, а второй — плотность вязкой диссипации<sup>1</sup>. Остальные члены (17) соответствуют различным механизмам обмена турбулентной энергии между слоями потока, это поперечный пульсационный перенос потенциальной и кинетической энергии и вязкая диффузия средней энергии, обусловленная неоднородностью течения.

Обозначим через  $\Phi(\eta) = -\overline{v_x v_y \varphi'} - \frac{\overline{\partial v_k}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial v_k}}{\partial x_j}$  локальное производство энергии. Поскольку вне области, занятой турбулентным потоком, пульсационные скорости равны нулю, при интегрировании (17) внеинтегральные члены, соответствующие процессам переноса, выпадают,

<sup>1</sup> Строго говоря, вязкая диссипация определяется выражением

$1/2(\overline{\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i})^2 = (\overline{\partial v_i / \partial x_j})^2 + \overline{v_y^{2''}}$ . Но разница невелика, по-

скольку  $|\overline{v_y^{2''}}| \ll |\overline{v_x^{2''}}|$ . Величина  $\overline{v_y^{2''}}$  в опытах не измерялась, поэтому обработку экспериментальных данных удобнее проводить в рамках уравнения (17).

так что интеграл от  $\Phi(\eta)$  по области течения равен нулю. Физический смысл этого означает, что в силу стационарности генерация и диссипация в целом сбалансированы. Локально такого баланса, вообще говоря, нет.

Слои, где  $\Phi(\eta) > 0$ , являются источниками пульсационной энергии. Путем механизмов переноса энергия доставляется в области стока, где  $\Phi(\eta) < 0$ . В турбулентном потоке существуют две зоны стока энергии. Это ближайшая окрестность стенки ( $\eta=0$ ), поскольку

$$\Phi(0) = -\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} < 0$$
, и область, примыкающая к оси канала или трубы ( $\eta=\eta_4$ ), так как согласно условию  $\Phi'(\eta_4)=0$  величина  $\Phi(\eta_4) < 0$ .

Из необходимости баланса следует, что области стока должна разделять зона генерации турбулентной энергии, где  $\Phi(\eta) > 0$ , поэтому график  $\Phi(\eta)$  имеет вид, изображенный на рис. 81.

Полезно ввести функцию  $N(\eta) = \int_0^{\eta} \Phi d\eta$ , которая имеет физический смысл потока пульсационной энергии из прилегающей к стенке области  $(0, \eta)$  во внешнюю часть течения. Из вида  $\Phi(\eta)$  ясно, что внутри области течения поток энергии  $N(\eta)$  меняет знак. Вблизи  $\eta=0$  он направляется к стенке, а вблизи  $\eta=\eta_4$  — к оси. Следовательно, существует  $\eta=\eta_2$ , где поток турбулентной энергии в среднем равен нулю:  $N(\eta_2)=0$ . Таким образом, течение можно разделить на две энергетически сбалансированные в среднем подобласти (рис. 82).

Для течения в пограничном слое внешняя граница турбулентной области ( $\eta=\eta_4$ ) характеризуется минимумом  $\Phi(\eta)$  (как и в трубах, и каналах), за которым расположена зона перемежаемости  $\eta > \eta_4$ , где генерация и диссипация асимптотически вырождаются. На рис. 81 и 82 эта ситуация показана пунктирными линиями.

Из проведенного анализа естественным образом следует энергетическая классификация подобластей турбулентного потока.

Область  $0 \leq \eta \leq \eta_1$ , где вязкая диссипация в силу условий прилипания преобладает над генерацией,

т. е.  $\Phi(\eta) < 0$ , можно отождествить с вязким подслоем.

Заметим, что идея об определении толщины вязкого подслоя из энергетических соображений впервые была выдвинута Кутателадзе [122]. Идя несколько другим путем, он получил оценку  $\eta_1 \approx 7$ .

Область  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ , которая снабжает энергией вязкий подслой и расположена между границей подслоя и адиабатической поверхностью, отождествим с буферной вязкой зоной.

Область  $\eta_2 \leq \eta \leq \eta_3$ , где производится пульсационная энергия, питающая внешние слои турбулентного потока, можно назвать внешней генерационной зоной (как будет показано далее, она совпадает с логарифмическим участком).

Наконец, область  $\eta_3 \leq \eta \leq \eta_4$ , где снова  $\Phi(\eta) < 0$ , т. е. генерации недостаточно для компенсации диссипации и турбулентный режим поддерживается притоком энергии из пристенных областей, отождествим с ядром.

Значения  $\eta_1$  и  $\eta_2$  определяются вязкостью, поэтому следует ожидать, что при достаточно больших числах Рейнольдса они будут универсальными

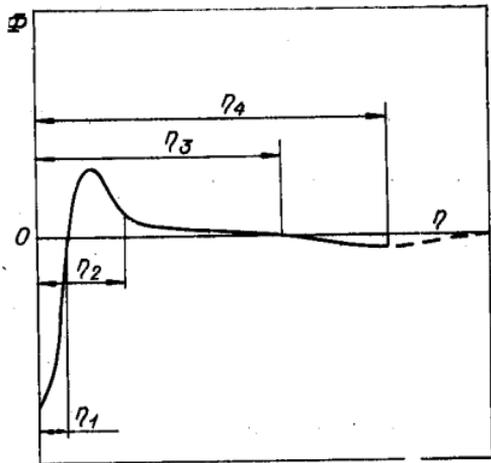


Рис. 81.

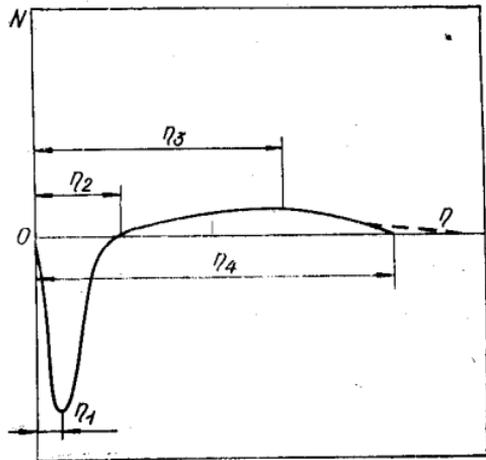


Рис. 82.

константами. Величины  $\eta_3$  и  $\eta_4$  при  $R \rightarrow \infty$  будут также возрастать до бесконечности, но их отношение в силу энергетического баланса должно стремиться к конечному значению. Величина  $\eta_3/\eta_4$  зависит от геометрических особенностей внешней области течения.

Экспериментальных данных, позволяющих оценить введенные масштабы, сравнительно немного. Члены уравнения (17) были измерены для течения в трубе и канале Лауфером [431, 432] и Лоуном [433], а для пограничного слоя — в работе [286]. Основные экспериментальные трудности связаны с измерением корреляции  $\overline{p'v'}$  и диссипативного члена, при оценке величины которого принимаются упрощающие гипотезы [217]. Так как в экспериментах измерялись отдельные члены (17), а не функция  $\Phi(y)$ , то для ее получения требуется дополнительная обработка опытного материала. Эта обработка по необходимости носила графический характер, и поэтому все приводимые ниже экспериментальные значения масштабов следует рассматривать как ориентировочные. По данным Лауфера можно оценить  $\eta_1 \approx 8$ ;  $\eta_2 \approx 25$ . Сопоставление полученных масштабов с рис. 80 показывает, что введенная здесь энергетическая классификация слоев удовлетворительно согласуется с общепринятой по профилю скорости. В области  $0 < \eta < \eta_1$  профиль практически линеен, а при  $\eta > \eta_2$  с хорошей точностью выполняется логарифмический закон. Отношение  $\eta_3/\eta_4$  для труб и каналов, по опытным данным [431, 432, 433], составляет примерно 0,3, а для пограничных слоев [286] — около 0,5. Таким образом, величина  $\eta_3$  примерно соответствует концу логарифмического участка профиля скорости.

Введенная здесь классификация слоев турбулентного потока дает основу для сопоставления различных экспериментальных данных и теоретических моделей. Было бы весьма полезным проведение детальных экспериментальных исследований для выявления зависимости этих характерных масштабов от числа Рейнольдса, геометрии течения и других факторов турбулентного режима.

Интересно сопоставить размер генерационной зоны, наблюдаемой в опытах, с результатами линейной теории устойчивости. В главе II было показано, что если течение Пуазейля при больших  $R$  с помощью внешних воздействий привести в ламинарное состояние и затем снять эти воздействия, то генерация турбулентности будет происходить в определенном интервале волновых чисел и фазовых скоростей возмущений (см. рис. 17). При этом внешний масштаб генерационной зоны в силу преобразования Сквайра примерно соответствует критическим значениям параметров. Функция  $\Phi(y)$  для нейтральных колебаний, отвечающих носике нейтральной кривой, нанесена на рис. 19. Положению внешней границы генерационной зоны на этом рисунке соответствует  $\eta_3/\eta_4=0,25$ , что удовлетворительно согласуется с опытными данными Лауфера.

На рис. 83 и 84 изображена генерационная зона и распределение  $\Phi(y)$  на носике нейтральной кривой для течения Блазиуса. Точке  $M$  отвечают критические значения параметров, линии  $AMB - R=10^3$ ;  $CMD - 10^4$ ;  $EMF - 10^5$ ;  $OAMDO - R=\infty$  (масштабом длины служит толщина вытеснения). Сходный характер носят зависимости  $\Phi(y)$  по экспериментальным данным [266] и линейной теории устойчивости (в плоскопараллельном приближении) для плоской струи.

Сопоставление носит, конечно, качественный характер. Во-первых, с учетом нелинейных эффектов генерационные зоны, даваемые линейной теорией, могут деформироваться, во-вторых, точность измерения  $\Phi(y)$  в опытах была невелика. Тем не менее мы видим (особенно отчетливо на примере течения Пуазейля), что масштабы генерационной и диссипативной зон определяются с хоро-

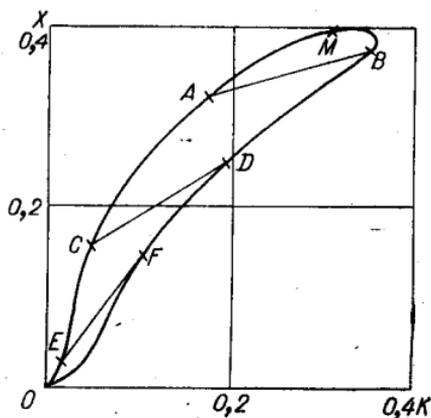


Рис. 83.

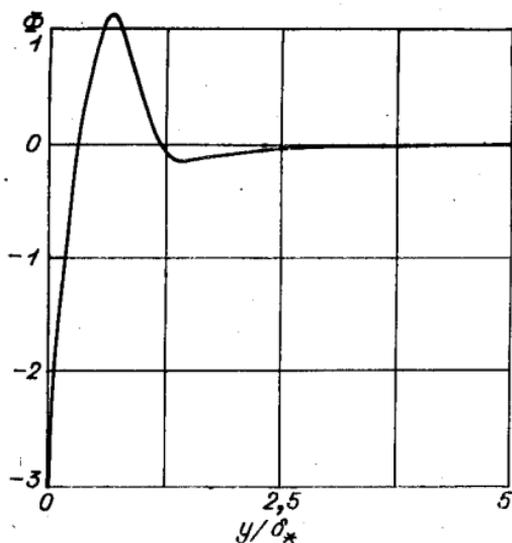


Рис. 84.

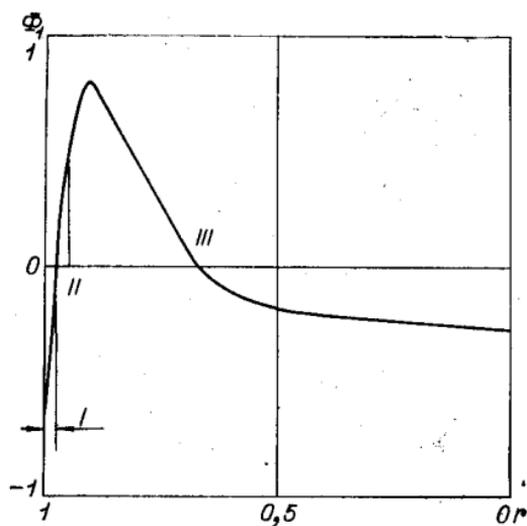


Рис. 85.

шим приближением уже в рамках линейной теории. При этом характер  $\Phi(y)$  во внешней диссипативной зоне моделируется довольно грубо, потому что там основную роль играет каскадный процесс Ричардсона — Колмогорова, не описываемый линейной теорией. Внутренняя диссипативная и генерационные зоны моделируются более адекватно, поскольку крупномасштабные по однородным переменным вихри, ответственные за возбуждение турбулентности, имеют большие поперечные градиенты у стенки, в силу чего играют ведущую роль и в диссипации. Важность пристенной зоны подчеркивается тем опытным фактом, что интенсивности генерации и диссипации в буферной вязкой зоне значительно превосходят соответствующие значения во внешних областях. Это обстоя-

тельство и энергетическая автономность указанной зоны будут использованы в дальнейшем при построении приближенной теории пристенной турбулентности.

Предложенная методика классификации легко может быть распространена на тепловые (или диффузионные).

слои в турбулентном потоке. Следует выписать уравнения для среднего квадрата пульсаций температуры [87, 298]

$$\frac{\overline{\partial v^2}}{\partial t} = -2\overline{v_y v} T' - 2\text{Pr} \frac{\overline{\partial v}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial v}}{\partial x_j} - \frac{\overline{d v_y v^2}}{dy} + \text{Pr} \frac{\overline{d^2 v^2}}{dy^2} = 0, \quad (18)$$

где  $T'$  — градиент средней температуры потока. Первый член (18) описывает порождение температурных пульсаций, второй — рассеяние температурных неоднородностей в результате молекулярной теплопроводности, а остальные члены определяют турбулентный и молекулярный переносы пульсаций температуры. Аналогом функции  $\Phi(\eta)$  служит локальная генерация пульсаций температуры  $\Phi_1(\eta) = -\overline{v_y v} T' - \text{Pr} \left( \frac{\overline{\partial v}}{\partial x_j} \right)^2$ . Профиль этой функции для течения ртути в круглой трубе после соответствующей обработки экспериментальных данных [39] изображен на рис. 85.

Тепловые слои в турбулентном потоке, как видно из рис. 85, вполне аналогичны динамическим. Вблизи стенки существует зона, где молекулярный механизм рассеяния тепловых неоднородностей преобладает над генерацией пульсаций. Его можно назвать молекулярным подслоем. Аналогично вводятся масштабы молекулярной буферной зоны и теплового ядра потока. Эти масштабы хорошо согласуются с характерными участками профиля средней температуры.

До сих пор были рассмотрены примеры одномерных течений. Однако предложенная классификация и определение слоев турбулентного потока без труда обобщаются для трехмерного случая. Уравнение для пульсационной энергии имеет вид

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \Phi - \frac{\partial N_j}{\partial x_j} = 0; \quad \int_{\Omega} \Phi(x, y, z) d\Omega = 0;$$

$$\Phi = -\overline{v_i v_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2R} \left( \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}} \right)^2;$$

$$N_i = U_j \overline{E} + \overline{(p + E) v_j} - \frac{1}{R} \frac{\partial \overline{E}}{\partial x_j} - \frac{1}{R} \frac{\overline{\partial v_k v_j}}{\partial x_k}.$$

Здесь  $\Omega$  — область, занятая пульсационным движением;  $\Phi$  — суммарная мощность локальных источников и стоков;  $N_j$  — поток турбулентной энергии. Поверхности  $\Phi(x, y, z) = 0$  отделяют диссипативные (вязкий подслой, ядро) и генерационные подобласти течения. Поверхности  $f(x, y, z) = 0$ , определяемые уравнением

$$N_x \partial f / \partial x + N_y \partial f / \partial y + N_z \partial f / \partial z = 0$$

и являющиеся сепаратриссами векторного поля  $N_j$ , будут адиабатическими стенками в том смысле, что средний поток пульсационной энергии через них равен нулю.

## § 2. УСТОЙЧИВОСТЬ КАК СВОЙСТВО ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Наряду с огромным потоком исследований по ламинарной устойчивости имеется несколько работ по устойчивости турбулентных течений [84—86, 220, 221, 284, 367, 388, 420, 438, 442, 447, 504, 540]. В ряде случаев неустойчивость турбулентного потока обнаруживается опытным путем, например, отрывное течение в плоском диффузоре может изменять свою форму буквально по мановению руки. Точно так же можно установить два различных состояния у закрученной струи, вытекающей из отверстия в стенке. В одном из режимов струя распространяется вдоль оси симметрии, в другом она веро-ером растекается вдоль стенки, в то время как в приосевой зоне возникает возвратное течение. Это наблюдается в условиях неизменности расхода жидкости и конструкции направляющего аппарата, причем и здесь сменять режимы можно взмахом руки. Число подобных примеров можно увеличить. Но во всех случаях речь идет не о подлинной неустойчивости потока по отношению к малым возмущениям, а о разных метастабильных состояниях, переход между которыми требует воздействия с конечной энергией. В малом любой реальный поток в определенном смысле устойчив, в противном случае он был бы ненаблюдаем. Это свойство коренным образом отличает турбулентные течения от ламинарных,

Теоретический интерес к проблеме устойчивости турбулентных течений связан с надеждой получить информацию о самой турбулентности путем изучения эволюции наложенного внешнего сигнала. Первое теоретическое исследование по устойчивости турбулентного потока принадлежит Малкусу [447], который выдвинул как гипотезу некоторый вариационный принцип, управляющий реальным турбулентным потоком в канале. Согласно Малкусу, турбулентное течение характеризуется максимальной диссипацией энергии в классе нейтрально устойчивых профилей средней скорости при данном числе Рейнольдса. Хотя гипотеза Малкуса не получила подтверждения в дальнейших работах, как теоретических, так и экспериментальных, она сыграла свою роль вариационной постановкой проблемы турбулентности.

Интуитивно свойство устойчивости турбулентного потока представляется несомненным. Однако придать ясный смысл этому понятию и предложить методику экспериментального доказательства данного свойства не так-то просто, имея в виду трудность различения наложенных малых возмущений на фоне собственных турбулентных пульсаций. Задача была решена в работах Рейнольдса и Хусейна [385, 386, 505]. Эти авторы наблюдали затухание искусственного возмущения при движении турбулентного потока в прямоугольном канале с шириной 2,5 дюйма и отношением сторон 1:18. У каждой из стенок располагались вибрирующие полоски, которые инициировали слабые волновые возмущения, причем полоски колебались синфазно, порождая симметричные поперечные и антисимметричные продольные возмущения. Периодический режим колебаний полосок использовался в качестве «часов» для выборочного усреднения, что позволило выделить слабое неслучайное волновое движение на фоне конечных турбулентных пульсаций. Метод выборочного усреднения основан на следующих соображениях. Произвольная флуктуирующая величина  $f(t)$  представляется в виде  $f(t) = \bar{f} + \tilde{f}(t)$ , где  $\bar{f}$  — среднее по времени  $\left( \bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right)$ ;  $\tilde{f}(t)$  — средний статистический отклик на наложенное

возмущение;  $f^r(t)$  — турбулентный фон. Для периодической функции  $\bar{f}(t)$  среднее по ансамблю  $\langle \bar{f}(t) \rangle$  совпадает со значением

$$\tilde{f}_N(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \tilde{f}(t + nT), \quad (1)$$

которое называется «средним по фазе», причем  $T$  — период возмущения. При любом способе усреднения вклад турбулентного фона исчезает, поэтому  $\bar{f} + \langle \bar{f}(t) \rangle = f_N(t)$ , так что  $\bar{f}(t) = \langle \bar{f}(t) \rangle = f_N(t) - \bar{f}$ . Правая часть этого соотношения поддается экспериментальному определению, если в выражении (1) не осуществлять предельный переход, а просто рассматривать достаточно большие значения  $N$ . Период  $T$  делится на  $m$  равных частей, и для каждой фазы  $t_k = kT/m$  находится величина  $f_N(t_k)$ , следовательно, и  $\bar{f}_N(t_k)$ .

В опытах Рейнольдса и Хусейна измерения проводились при числе Рейнольдса 13 800 ( $R = U_m h / \nu$ ) и четырех частотах колебаний полосок. С помощью термоанемометра измерялись амплитуда и фаза продольной компоненты возмущения. По измеренным параметрам определялись нормальная компонента скорости и возмущения рейнольдсовых напряжений. Замеры в различных сечениях позволили проследить вниз по потоку за изменением амплитуды, фазовой скорости и других характеристик сигнала вплоть до его практического исчезновения. К сожалению, приведенные материалы демонстрируют непрерывное изменение формы сигнала, что свидетельствует о присутствии в данном возмущении нескольких мод. Это затрудняет анализ результатов по сравнению со случаем «чистого тона». Тем не менее основной вывод об устойчивости в среднем турбулентного течения в канале следует из названных работ с полной определенностью.

Однако одной лишь констатации факта устойчивости турбулентного потока недостаточно для теоретического определения единственного искомого режима из множества допустимых уравнениями Навье — Стокса. Как мы видели в предыдущей главе, при заданном достаточно большом числе Рейнольдса существует континуум устой-

чивых по амплитуде модельных автоколебаний. Подобная ситуация возникает и в точной задаче о ветвлении исходных стационарных решений уравнений Навье — Стокса, при зарождении термогравитационной конвекции, а также при развитии вихрей Тейлора между двумя вращающимися цилиндрами. Во всех этих случаях необходим выбор из широкого класса допустимых решений единственного, существующего в практике, либо указание способа усреднения по этому классу при статистическом подходе к проблеме.

В классе устойчивых по амплитуде моногармонических автоколебаний было выделено одно — максимально устойчивое, которое в отличие от остальных обладало нейтральной устойчивостью по отношению к возмущению другой длины волны. В случае моногармонических колебаний семейство исследуемых режимов было двухпараметрическим, для резонансных трехгармонических колебаний пространство параметров уже четырехмерно, и с ростом числа степеней свободы, т. е. по мере улучшения качества приближения турбулентного режима, число произвольных параметров быстро возрастает. В связи с этим предельный счетномерный режим разумно искать как максимально устойчивый в некотором функциональном пространстве. Эти соображения нашли свое воплощение в принципе максимальной устойчивости усредненных турбулентных течений [60].

Так как при анализе устойчивости данного  $n$ -мерного режима по отношению к возбуждению следующей гармоники роль автоколебаний сводится к формированию среднего профиля скорости, поскольку непосредственно на устойчивость в указанном смысле они не влияют, то в качестве первого приближения естественно абстрагироваться от наличия пульсаций и рассмотреть устойчивость непосредственно профилей средней скорости из некоторого семейства в «квазиламинарном» приближении (термин принадлежит Кутателадзе [120]), используя уравнение Орра — Зоммерфельда.

На основе данной постановки удалось рассчитать ряд характеристик турбулентного потока в канале и пограничном слое. Результаты этих исследований излагаются в следующих параграфах.

Лятхер [151, 152] ставит проблему шире и пытается применить принцип максимальной устойчивости в целях решения уравнения Хопфа для характеристического функционала.

Постановку задачи об устойчивости турбулентного потока следует сформулировать в статистических терминах, поскольку для турбулентных течений имеет смысл лишь устойчивость в среднем.

Пусть дан ансамбль турбулентных потоков в некоторой фиксированной области течения, отличающихся начальными данными, но имеющими в стационарном состоянии одни и те же средние по времени характеристики, в частности среднюю скорость  $U_k$  и давление  $P$ . Каждая из реализаций ансамбля удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса

$$\frac{\partial v_k^T}{\partial t} + (U_j + v_j^T) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_k + v_k^T) = - \frac{\partial}{\partial x_k} (P + p^T) + \nu \Delta (U_k + v_k^T), \quad (2)$$

где верхний индекс — величина, относящаяся к турбулентным пульсациям.

Пусть в начальный момент каждый экземпляр ансамбля возмущается малым неслучайным полем ( $v_k, p$ ). Тогда для полного возмущенного движения справедливо уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (v_k^T + v_k) + (U_j + v_j^T + v_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_k + v_k^T + v_k) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_k} (P + p^T + p) + \nu \Delta (U_k + v_k^T + v_k). \end{aligned} \quad (3)$$

Вычитая (2) из (3) и линеаризуя по  $v_k$ , получим

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_k} - \nu \Delta v_k = - v_j^T \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial v_k^T}{\partial x_j}. \quad (4)$$

Здесь учтены уравнения неразрывности  $\frac{\partial v_j^T}{\partial x_j} = 0$ ;  $\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$ . Правая часть уравнения (4) носит случайный характер,

так что каждой реализации ансамбля  $v_k^T$  соответствует свое решение  $v_k$ . Совокупность всех решений  $v_k$  образует свой статистический ансамбль. Если все  $v_k$  из этого ансамбля подчинить одному и тому же неслучайному начальному условию  $v_k|_{t=0} = v_k(0)$ , то общее решение можно представить в виде суммы  $v_k = \tilde{v}_k + \hat{v}_k$  детерминированной и случайной частей, причем усреднение по ансамблю случайной части должно давать нуль:  $\langle \hat{v}_k \rangle = 0$ , так что  $\tilde{v}_k = \langle v_k \rangle$ . Заметим, что случайная часть возмущения, вообще говоря, не должна затухать; детерминированная часть, как это показано в предыдущем параграфе, непременно затухает.

Для того чтобы уравнение (4) сделать пригодным для использования, его правую часть приходится так или иначе моделировать, заменяя случайные величины детерминированными. В простейшем случае правая часть (4) просто отбрасывается. Подобное приближение, названное выше квазиламинарным, допустимо только в случае слабой турбулентности, когда

$$\|v^T\| \ll \|U\| \text{ и } \left\| \frac{\partial v_k^T}{\partial x_j} \right\| \ll \left\| \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right\|, \quad (5)$$

где скобками  $\| \|$  обозначена какая-нибудь норма, например максимум модуля.

Пусть рассматривается случай, когда степень турбулентности мала, тогда  $v_k^T = \varepsilon u_k$ , где  $\varepsilon \ll 1$ .

Разлагая  $v_k$  в ряд по степеням  $\varepsilon$

$$v_k = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_k^{(n)}, \quad (6)$$

где  $v_k^{(0)}|_{t=0} = v_k(0)$ ;  $v_k^{(n)}|_{t=0} = 0$ , и обозначая левую часть уравнения (4) через  $Lv_k$ , получим

$$Lv_k^{(0)} = 0; \quad Lv_k^{(1)} = -u_j \frac{\partial v_k^{(0)}}{\partial x_j} - v_j^{(0)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}; \dots$$

Функция  $v_k^{(0)}$  удовлетворяет неслучайным уравнению и начальному условию, поэтому она детерминирована. Заметим, что если  $v_k^{(0)}$  затухает, то затухают и все  $v_k^{(n)}$ , а с ними и  $v_k$ , если ряд (6) сходится.

Усредняя второе уравнение по ансамблю, получим  $L\tilde{v}_k^{(1)} = 0$ ;  $\tilde{v}_k^{(1)}|_{t=0} = 0$ , поэтому  $\tilde{v}_k^{(1)} \equiv 0$ . Следовательно, неслучайная часть решения может быть представлена в виде

$$\tilde{v}_k = v_k^{(0)} + 0(\epsilon^2).$$

Таким образом, в случае слабой турбулентности с точностью до величин порядка  $\epsilon^2$  справедливо квазиламинарное приближение  $Lv_k = 0$ , т. е. обычное уравнение линейной теории гидродинамической устойчивости, которое для одномерного среднего течения при учете только двумерных возмущений сводится к уравнению Орра — Зоммерфельда

$$v(v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v) = i\alpha[(U - C)(v'' - \alpha^2 v) - U''v], \quad (7)$$

где, как обычно,  $v$  — комплексная амплитуда поперечной скорости;  $\alpha$  — волновое число;  $C = X + iY$ ;  $X$  — фазовая скорость сигнала;  $Y$  — декремент его затухания.

Уравнение (7) отличается от классического только видом функции  $U(y)$ , так что в квазиламинарном приближении затухание сигнала в турбулентном потоке обусловлено только его взаимодействием со средним профилем скорости  $U(y)$ , непосредственное взаимодействие с турбулентными пульсациями не учитывается.

Квазиламинарный подход имеет ограниченную сферу действия, в частности, он неприменим для случая однородной изотропной турбулентности и для потока в канале в целом, поскольку в ядре течения условия близки к однородным и изотропным и неравенства (5) заведомо не выполняются ввиду малости градиента средней скорости  $\|\text{grad } U\|$ . Тем не менее для локального анализа отдельных участков среднего течения с помощью коротковолновых возмущений, что возможно в силу свойств локальности задачи гидродинамической устойчивости, квазиламинарное приближение вполне

приемлемо. Это относится не только к тем участкам, где выполняются неравенства (5), как это имеет место, например, в близкой пристенной зоне [124], но и к участкам, где «турбулентная вязкость» может считаться примерно постоянной.

Упомянутая турбулентная вязкость  $\nu_t$  наряду с другими моделями непосредственного взаимодействия возмущений с турбулентными пульсациями будет рассмотрена ниже. Она представляет собой величину, сильно изменяющуюся по сечению потока и зависящую от частоты и длины волны сигнала. Однако, согласно опытным данным [385, 430], в окрестности оси канала величина  $\nu_t$  является постоянной, поэтому возможно локальное рассмотрение приосевой зоны в квазиламинарном приближении, что не противоречит сделанному выше утверждению о невозможности такого обсуждения в глобальном плане. Другой случай применения квазиламинарного приближения — длинноволновые возмущения, затухание которых слабо зависит от деформаций, профиля скорости и даже от его вида в целом. Естественно допустить, что то же относится и к турбулентной структуре потока. В пользу этого могут быть высказаны следующие соображения.

В технически интересных случаях турбулентность представляет собой относительно мелкомасштабное явление с характерным масштабом турбулентности  $\Lambda \sim 1$ . При течении в канале или пограничном слое в случае длинноволновых возмущений усреднение уравнения (4) по  $x$  с масштабом усреднения  $\Lambda$  обратит в нуль правую часть (4), поскольку рассматриваемое возмущение  $u_n$  на длине  $\Lambda$  практически остается постоянным, что и приводит к квазиламинарному приближению.

В соответствии с изложенным при обсуждении устойчивости турбулентного течения в канале квазиламинарное приближение будет использоваться при расчете пристенных мод для всех значений  $\alpha$ , приосевые моды будут рассматриваться только в условиях локальности с точностью до произвольного параметра  $\nu_t$ .

Квазиламинарное приближение не только является простейшей реализацией уравнения (4), но и позволяет существенно упростить задачу, ограничиваясь изучением

только двумерных возмущений, которые в силу теоремы Сквайра наиболее опасны. Отметим, что двумерность налагаемых неслучайных возмущений не мешает с их помощью выявить некоторые эффекты, присущие трехмерной турбулентности, о чем речь пойдет ниже.

### § 3. КВАЗИЛАМИНАРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА В КАНАЛЕ

Исследование устойчивости турбулентного течения в канале первоначально было предпринято Малкусом с целью реализации своей гипотезы. Использование довольно грубых асимптотических оценок при решении уравнения Орра — Зоммерфельда дало неплохие результаты относительно профиля средней скорости в канале, что привлекло к теории Малкуса внимание гидромехаников. На международном конгрессе по турбулентности в Марселе (1961 г.) она детально обсуждалась Таундсеном [554] и Шпигелем [535], которые признали доводы Малкуса правдоподобными. Позднее Нихоль [466, 467] предпринял попытку обосновать подход Малкуса на основе принципа Пригожина для установившихся диссипативных процессов. Савулеску и Настази [517], следуя Малкусу, теоретически рассчитали профиль усредненной скорости в турбулентном пограничном слое и получили известный закон «одной седьмой». Однако проверка расчетов Малкуса, предпринятая Рейнольдсом и Тидерманом [507], показала, что экспериментальный турбулентный профиль при числе Рейнольдса  $R_0 = 25\,000$  не нейтрально, а глубоко устойчив. Кроме того, оказалось, что среди нейтрально устойчивых профилей с заданным критическим числом Рейнольдса  $R_c$  можно найти такие, в которых осуществляется как угодно большая диссипация энергии. Тем не менее Нихоль [468, 469] объяснил различие результатов работ [447] и [507] погрешностью асимптотических методов. Нихоль склонялся к теории Малкуса и пытался ее обосновать при помощи результатов Серрина в нелинейной теории устойчивости, хотя сам признал, что эти результаты не имеют прямого отношения к делу. Численная

проверка гипотезы Малкуса [68] сняла всякие сомнения методического характера и полностью подтвердила выводы Рейнольдса и Тидермана. Позднее те же результаты были получены в работе [488].

При рассмотрении гидродинамической устойчивости экспериментального турбулентного профиля важна тщательная аппроксимация опытных данных, особенно в вязком подслое и переходной области, которые существенно влияют на величину  $R_*$ .

Профиль скорости  $U(y)$  аппроксимируется на основе уравнения динамики с использованием формулы Прандтля для турбулентных напряжений

$$dU/dy + R_0 l^2 |dU/dy| dU/dy = U'_0 (1 - y); \quad U'_0 = |dU/dy|_{y=0}. \quad (1)$$

Здесь за масштаб длины принята полуширина канала  $h$ , за масштаб скорости — средняя расходная скорость  $U_{cp}$ ,  $R_0 = U_{cp} h / \nu$ ,  $y$  отсчитывается от стенки канала ( $0 \leq y \leq 2$ ).

Длина пути смещения аппроксимируется зависимостью

$$l = H(y) \{1 - \exp[-\eta(2-y)/A]\}^n. \quad (2)$$

Здесь  $H(y)$  — полином четвертой степени; при  $y=0$ ,  $H=0$ ,  $dH/dy = \kappa$ , а при  $y=1$   $H=l_0$ ,  $dH/dy = d^3H/dy^3 = 0$ , т. е. вблизи стенки  $H \approx \kappa y$ , а у оси канала выполняются условия симметрии, так что

$$H = l_0 - (2l_0 - \kappa/2)(1-y)^2 - (\kappa/2 - l_0)(1-y)^4. \quad (3)$$

Величина  $\eta = v_* y / \nu = y \sqrt{U'_0 R}$  представляет собой обычную безразмерную переменную пристенной области.

Полиномиальная зависимость для длины пути смещения хорошо себя зарекомендовала при аппроксимации широкого круга опытных данных. Множитель при  $H(y)$  в формуле (2) обобщает поправку Ван-Дрифта [559] для длины пути смещения в вязком подслое; случаю Ван-Дрифта соответствует  $n=1$ .

Наряду с соотношениями (1) и (2) для аппроксимации среднего турбулентного профиля в работе [507],

а затем в [60, 64] использовалось представление, включающее турбулентную вязкость  $\nu_T$ ,

$$dU/dy = U'_0 (1-y)/(1+\nu_T); \quad \nu_T = 1/2 \cdot \{1 + (\kappa^2 R_0 U'_0 / 9) \times \\ \times [y(2-y)(3-4y+2y^2)(1 - \\ - \exp[-\eta(2-y)/A])]^{1/2} - 1/2. \quad (4)$$

При интегрировании уравнений (1) и (4) применяется граничное условие  $U(0)=0$ , а также условие

$$\int_0^1 U dy = 1, \quad (5)$$

определяющее параметр  $U'_0$ . Фактически условие (5) выполняется за счет выбора  $U'_0$  численно итеративным способом.

Соотношения (1)–(3) и (4) дают близкие результаты в ядре потока и в логарифмической области, однако в вязкой зоне между ними имеется заметное расхождение. Это видно из рис. 86, где кривой 2 показан профиль, полученный при усреднении большого числа опытных данных [163]. Кривая 2 соответствует соотношениям (4) при  $\kappa=0,4$ ,  $A=62$ ; пунктирная кривая отвечает формулам (1)–(3) при  $\kappa=0,4$ ;  $l_0=0,14$ ;  $A=200$ ;  $n=0,5$ , зависимость  $\varphi \equiv U/v_* = \eta$  соответствует кривой 3 и  $\varphi=5,75 \lg \eta + 5,5$  — прямой 4.

Приведенные данные говорят в пользу аппроксимации с помощью соотношений (1)–(3), которые и используются в дальнейших расчетах. В рамках квазиламинарного приближения расчеты сводятся к решению уравнения Ора — Зоммерфельда

$$v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v = i\alpha R [(U-C)(v'' - \alpha^2 v) - U''v]; \\ v = v' = 0 \quad \text{при } y=0; \quad y=2. \quad (6)$$

Здесь  $R$  — число Рейнольдса, которое является формальным параметром и априори не связано с числом Рейнольдса потока  $R_0$ . Для правильности гипотезы Малкуса необходимо (но недостаточно), чтобы для исследуемого профиля скорости  $U(y)$  критическое число Рей-

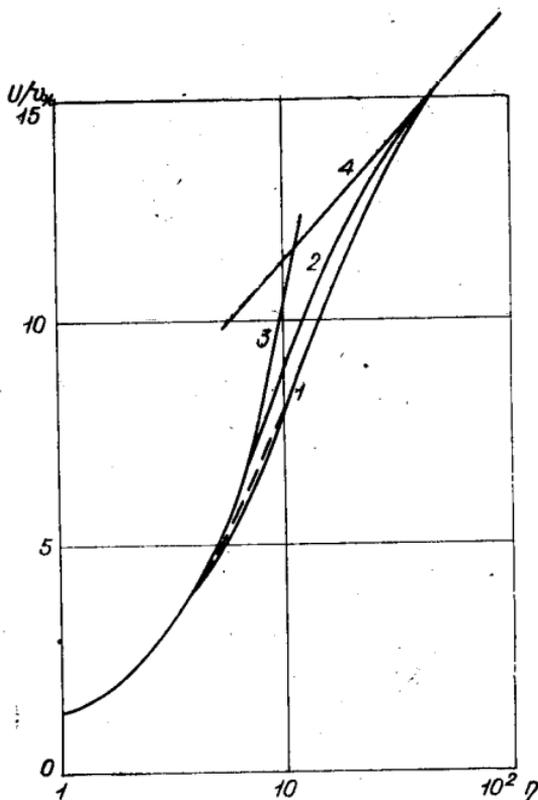


Рис. 86.

нольдса  $R_*$ , определенное на основе (6), совпало с  $R_0$ .

Результаты расчетов устойчивости турбулентного профиля при  $R_0=25\,000$  отражены на рис. 87 в виде нейтральной кривой  $\alpha(R)$ , «носику» которой соответствуют значения  $R_*=980\,000$ ,  $\alpha_*=24$ ,  $X_*=0,15$ , что несколько отличается от расчетов в работе [507], где при  $R_0=25\,000$  получено  $R_*=250\,000$ ,  $\alpha_*=40$ ,  $X_*=0,194$ . Однако это отличие не принципиально и, скорее всего, объясняется различной точностью аппроксимации опытных данных в вязком подслое.

Расчеты при других значениях  $R_0$  из диапазона  $5000 \leq R_0 \leq 25\,000$  дали следующие зависимости:

$$R_* = 39,2 R_0; \alpha_* = 0,00096 R_0. \quad (7)$$

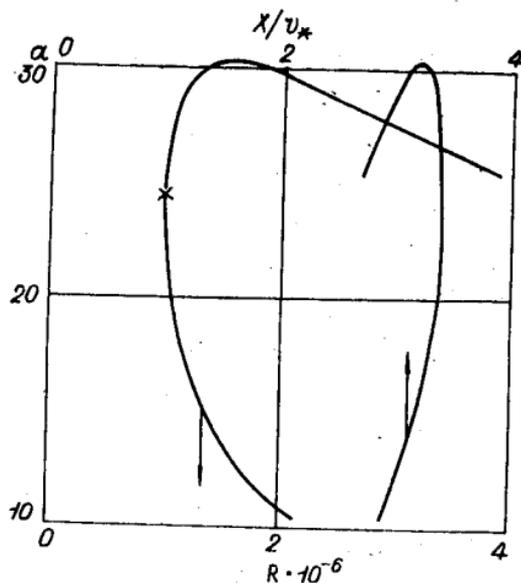


Рис. 87.

Критическая точка  $y_c(U(y_c)=X)$ , соответствующая «носику» нейтральной кривой, с ростом  $R_0$  стремится к стенке, однако в универсальных координатах ее положение остается постоянным и  $\eta_c=3,7$ .

На рис. 88 показана зависимость  $Y(\alpha)$  для наименее затухающих возмущений при  $R_0=25\,000$  и  $R=10^6$ , которая свидетельствует о том, что неустойчивость связана лишь с волновыми числами  $\alpha \approx 24$ , остальные возмущения затухают.

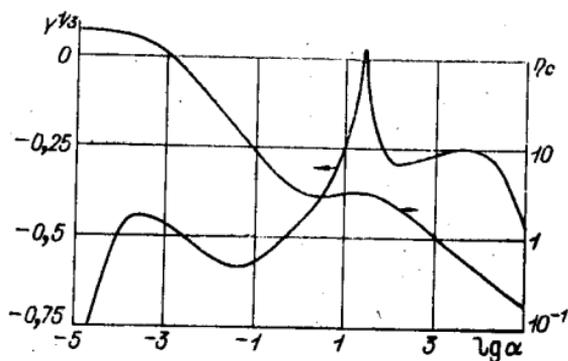


Рис. 88.

Существенно, что неустойчивость имеет место при больших значениях  $\alpha$  и обусловлена локальными пристенными возмущениями, поведение которых зависит только от свойств профиля скорости в окрестности стенки. Отсюда видно, какую важную роль играет точность аппроксимации профиля средней скорости в этой зоне. В частности, аппроксимация (4), использованная в работе [507], дает меньший «запас устойчивости» турбулентного профиля, что выражается в уменьшении коэффициента первой из формул (7) от 40 до 10.

Подбором формы профиля в вязком подслое и переходной зоне можно добиться его нейтральной устойчивости. Но тогда характеристики профиля в пристенной зоне будут сильно отличаться от экспериментальных. Требование Малкуса о максимальной диссипации только усугубляет положение. Поскольку  $u_c \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ , деформация профиля на весьма малом участке вблизи стенки скажется только на возмущениях с весьма большими  $\alpha$ , причем можно добиться, чтобы эти волновые числа были много больше вычисленного  $\alpha$ . Таким образом, возможно деформировать профиль в глубине вязкого подслоя, оставляя его нейтрально устойчивым. При этом величину  $U_0'$  и соответственно скорость диссипации энергии можно сделать сколь угодно большой, что согласуется с выводами работы [507].

То обстоятельство, что для нейтрального и близких к нему возмущений критические точки лежат в вязком подслое, имеет решающее значение. Согласно свойствам локальности, собственные значения в этом случае практически не зависят от формы профиля вне пристенной зоны, так что произвольная деформация профиля с высокой точностью не повлияет на декременты этих возмущений. Таким образом, требование нейтральной устойчивости не позволяет однозначно определить форму профиля вне всякого подслоя и переходной зоны. С другой стороны, с ростом заполненности профиля, например, вследствие увеличения  $R_0$ , как было показано, величина  $R_c$  возрастает. Фиксируя произвольно большой градиент скорости на стенке, можно «ухудшить» (и притом различными способами) профиль скорости таким образом, чтобы он сделался нейтрально устойчивым.

Следовательно, даже если бы требования Малкуса и выполнялись для экспериментального профиля, они не позволили бы найти этот профиль однозначно. Только выделяя специальный класс пробных профилей, в рамках гипотезы Малкуса можно получить константу Кармана  $\kappa$  или закон «одной седьмой».

Таким образом, гипотеза Малкуса о нейтральной устойчивости усредненного турбулентного потока не подтверждается ни экспериментом, ни численными расчетами. Напротив, и то и другое говорит о глубокой устойчивости усредненного турбулентного профиля. На рис. 89 показана зависимость  $Y(\alpha)$  для той же моды, что и на рис. 88 (это первая пристенная мода, если нумерацию осуществлять при  $\alpha \rightarrow 0$ ), но при  $R=R_0=10^4$ . Обращает на себя внимание тот факт, что даже наименее затухающие возмущения имеют большой по модулю декремент затухания  $|Y| \approx 0,1$ . Если сопоставить в смысле устойчивости турбулентный профиль скорости с параболическим и постоянным при том же расходе и, следовательно, числе Рейнольдса, то этот профиль наиболее устойчив. В самом деле, при  $R=10^4$  парабола вообще неустойчива, а профиль  $U \equiv 1$  хотя и устойчив, но весьма «слабо». Так, при  $\alpha=1$  для первой моды  $Y = -0,001$ . Из сказанного вытекает, что если рассмотреть однопараметрическое семейство профилей с формпараметром  $\kappa$ , который при изменении  $\kappa$  от 0 до  $\infty$  непрерывно деформируется от параболы до констан-

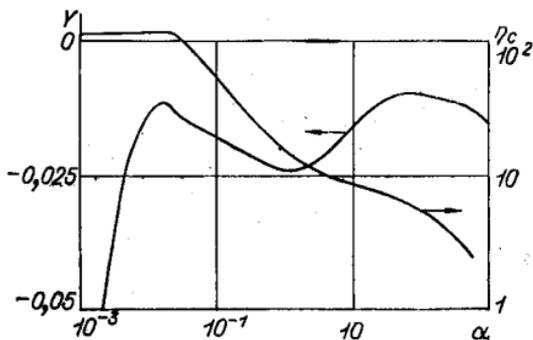


Рис. 89.

ты при условии сохранения расхода  $\int_0^1 U dy = 1$ , то в этом семействе найдется наиболее устойчивый профиль.

В качестве упомянутого однопараметрического семейства профилей в работах [60, 64] было взято семейство, определяемое отношениями (4), где было положено  $A=62$ . Для фиксированных значений  $R=10^4$  и  $\alpha=1$  численно решалась задача (6), результаты решения отражены на рис. 90. С увеличением  $\kappa$  от нуля течение быстро стабилизируется, достигая наиболее устойчивого состояния ( $Y=-0,233$ ) при  $\kappa=0,26$ . Отметим, что при  $0,1 < \kappa < 1$  все профили обладают не менее чем стократным «запасом устойчивости» по сравнению с однородным профилем.

Расчеты показывают, что при изменении  $\alpha$  минимум функции  $Y(\kappa)$  смещается, поэтому необходимо выбрать характерное значение  $\alpha$ . Устойчивость течения естественно характеризовать значением величины  $\Pi = \max_{\alpha} Y(\alpha)$ . Однако, как видно из рис. 89, функция  $Y(\alpha)$  может иметь несколько локальных максимумов, поэтому среди

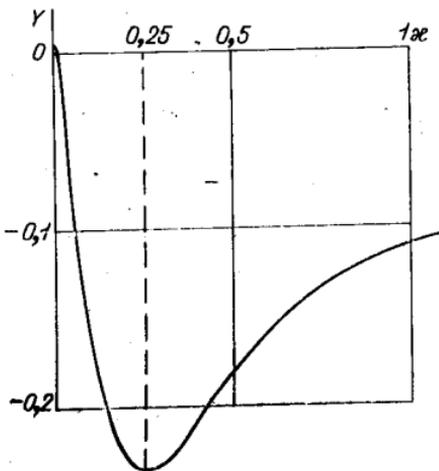


Рис. 90.

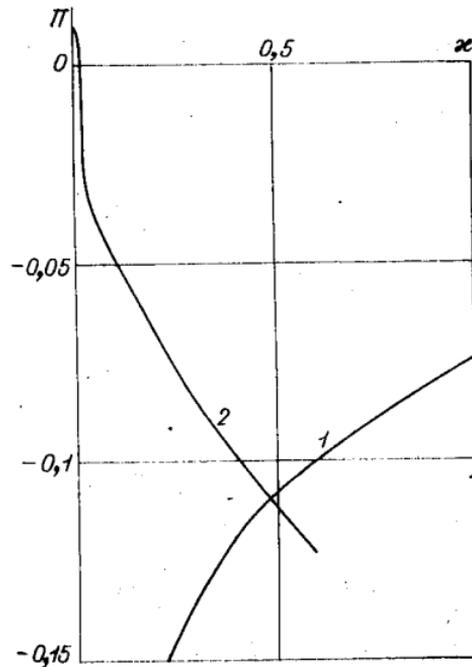


Рис. 91.

максимумов нужно выбрать наибольший, т. е. в качестве меры устойчивости профиля выбрать функционал

$$\Pi = \sup_{\alpha} Y(\alpha). \quad (8)$$

Наиболее устойчивым считается профиль, для которого значение  $\Pi$  минимально.

Зависимость  $\Pi(\kappa)$ , которая состоит из двух ветвей (1, 2), соответствующих наличию двух максимумов у функции  $Y(\alpha)$ , показана на рис. 91. При значениях  $\kappa < 0,482$  наиболее опасны коротковолновые возмущения, при  $\kappa > 0,482$  роль наиболее опасных переходит к длинноволновым возмущениям с малыми значениями  $\alpha$ . При определении величины  $\Pi$  согласно (8) части ветвей ниже точки пересечения должны быть отброшены, так что профиль с параметром  $\kappa = 0,482$  максимально устойчив в данном классе профилей. Для указанного профиля характерно «равновесие» между коротко- и длинноволновыми возмущениями.

Существенно отметить, что полученное значение  $\kappa$  практически не изменяется с ростом числа Рейнольдса. Найденный здесь максимально устойчивый профиль почти не отличается от экспериментального. Это обстоятельство свидетельствует в пользу гипотезы о максимальной устойчивости реальных турбулентных течений.

#### § 4. ПРИНЦИП МАКСИМАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УСРЕДНЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Общая формулировка принципа состоит в утверждении, что в реальном турбулентном потоке малые возмущения затухают максимально быстро по сравнению с другими виртуальными потоками. Прежде всего, подлжит конкретизации понятие «максимально быстро». Предположим сначала, что область течения ограничена. Тогда спектр линейной задачи устойчивости будет счетен. Пусть имеется достаточно широкий класс исследуемых на устойчивость течений. Обозначим через  $\Pi_1$  максимальный для данного течения инкремент затухания. Выделим подкласс течений, на котором реализуется

$\inf \Pi_1$ . В этом подклассе определим  $\Pi_2$  как максимальный для данного течения инкремент следующего спектрального уровня и выделим следующий подкласс, на котором  $\Pi_2$  достигает минимального значения. Единственное решение можно выбрать и за конечное число шагов, в противном случае, продолжая этот процесс до тех пор, пока не исчерпаются все спектральные уровни, мы выделим, в конце концов, решение (или минимальный подкласс), которое будет максимально устойчиво в спектральном смысле. Ясно, что на этом решении будет минимизироваться любой знакоопределенный и монотонный функционал. Переход к сплошному спектру происходит при стремлении размера области к бесконечности.

Для практических расчетов изложенный подход весьма громоздок, и целесообразно, исходя из физических соображений, ввести определенный функционал как меру устойчивости течения. В качестве такого функционала в работе [61] предложено «действие»

$$S = \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega} v_k^2 d\Omega. \quad (1)$$

Если форма начального сигнала фиксирована, то, чем быстрее затухает возмущение, тем меньше величина  $S$ . Так как неустойчивость обычно проявляется в сравнительно узком диапазоне волновых чисел, то начальный сигнал должен быть достаточно представительен. В этом смысле наиболее подходящ так называемый белый шум, когда энергия равномерно распределена по спектру.

Скорость неслучайной части произвольного возмущения можно представить в виде

$$v_k = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} \omega_k(y, \alpha, \beta, n) \exp i[\alpha(x - C_n t) + \beta z] d\alpha, \quad (2)$$

где  $\omega_k(y, \alpha, \beta, n)$  — собственные функции уравнения типа Орра — Зоммерфельда. Аналогичное разложение можно провести, используя собственные функции  $\psi_k(y, \alpha$

$\beta, n$ ) сопряженного оператора. Эти два базиса ортогональны, и нормировку можно выбрать так, чтобы

$$\int_{-1}^1 \omega_k(y, \alpha, \beta, n) \psi_k^*(y, \alpha, \beta, m) dy = \delta_{nm}.$$

Тогда после несложных преобразований действие будет выражаться соотношением (для двумерных возмущений)

$$S = - \sum_n \int_0^{\infty} d\alpha / (\alpha Y_n). \quad (3)$$

Заметим, что этот функционал будет минимизироваться на решениях, максимально устойчивых в спектральном смысле.

Для устойчивых течений все интегралы, входящие в (3), будут конечными числами, что следует из асимптотических зависимостей при малых и больших  $\alpha$  (см. главу I). Если  $Y_n(\alpha)$  пересекает ось  $Y=0$  или касается ее, т. е. имеет место неустойчивость, величина  $S$  обращается в бесконечность.

На основании изложенного можно дать следующую общую формулировку вариационной проблемы: найти такое поле пульсационных скоростей  $v_k^T$ , определенное с точностью до классов эквивалентности, на котором функционал  $S$  достигает минимума. Оговорка насчет классов эквивалентности связана с тем, что функционал  $S$  может принимать одинаковые значения на целом классе  $v_k^T$ . Возмущения  $v_k$  находятся интегрированием системы (2.4), где профиль  $U_k$  определяется уравнением Рейнольдса (1.2).

В столь общей постановке проблема, по-видимому, не менее трудна, чем решение уравнений Навье — Стокса. Поэтому при решении конкретных задач приходится прибегать к упрощениям. Таким упрощением является принятие некоторой модели относительно правой части (2.4), в частности использование квазиламинарного приближения, в котором в качестве независимо варьируемой функции можно использовать непосредственно профиль средней скорости  $U(y)$ .

В реальных расчетах, конечно, все спектральные уровни возмущений учесть невозможно, поэтому приходится прибегать к дальнейшему упрощению, состоящему в том, что в сумме (3) оставляются лишь моды, отвечающие максимальным значениям  $Y_n$  при данном  $\alpha$ .

Поскольку в дальнейшем анализ будет проводиться в квазиламинарном приближении, необходимо сделать еще одно замечание. Спектр турбулентного течения имеет обычно довольно сложный вид. На рис. 92 показано несколько спектральных мод для турбулентного экспериментального профиля в канале при  $R=10^4$ . Мы видим, что моды 2—4, отвечающие приосевым возмущениям, имеют гораздо большие декременты  $Y$  по сравнению с пристенной модой 1, хотя именно эта мода ответственна за неустойчивость ламинарного режима, да и турбулентного профиля, если  $R_0$  фиксировать, а  $R$  увеличить. Причины сравнительно более медленного затухания приосевых мод ясны из уравнения энергии. Поскольку градиент средней скорости в ядре значительно меньше, генерационный член пренебрежимо мал.

Основную роль в диссипации энергии у оси канала играет каскадный процесс Ричардсона—Колмогорова, который в квазиламинарном приближении не учтен. Ясно, что это приближение не адекватно приосевым воз-

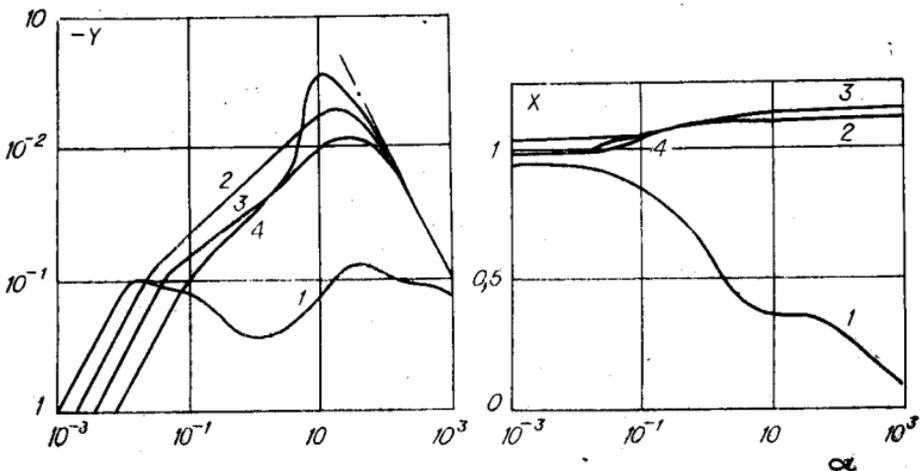


Рис. 92.

мушениям, и следует в какой-то форме учитывать турбулентную вязкость. Это будет сделано в дальнейшем. При расчете же характеристик пристенной турбулентности будут учитываться только моды, локализующиеся у стенки.

Подобное рассмотрение оправдано тем, что задачу о пристенной турбулентности можно выделить автономно. Такая постановка опирается на консервативные свойства пристенной турбулентности, в частности на факт существования универсального распределения для средней скорости в пристенной зоне при широком разнообразии внешних условий. Из сказанного вытекает, что для установления закономерностей пристенной турбулентности достаточно рассмотреть простейшую задачу, поставленную Прандтлем, об одномерном турбулентном потоке над плоской стенкой, на которой задано среднее напряжение трения  $\tau_0$  или динамическая скорость  $v_* = \sqrt{\tau_0}$ . Скорость на бесконечности не фиксируется, она может быть и неограниченной, как в аналогичной задаче о ламинарном течении, где скорость линейно зависит от поперечной координаты  $y$ . В этом случае вдали от стенки, где влияние вязкости исчезает, из полуэмпирической теории Прандтля следует логарифмическое распределение скорости (1.9).

Покажем, что это же распределение может быть получено из требования максимальной устойчивости на основе уравнения (2.7). Будем исходить из динамического уравнения

$$l^2 U''^2 = \tau = \text{const.}$$

Пусть  $l = ay^n$ , определим значение  $n$ , которому отвечает максимально устойчивый профиль из семейства

$$U = \gamma y^{1-n} + \beta. \quad (4)$$

Будем полагать  $n < 1$ , чтобы скорость на стенке была ограниченной. Подставляя (4) в уравнение Орра — Зоммерфельда, получим

$$v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha_4 v = i\alpha R [\gamma y^{1-n} + \beta - C] (v'' - \alpha^2 v) + \gamma n(1-n)y^{-1-n}v, \quad (5)$$

где  $R$  — число Рейнольдса для потока в целом, которое предполагается большим, а для безграничного потока под  $R$  можно понимать текучесть  $1/\nu$ .

Для того чтобы выяснить, как зависят собственные значения  $C$  от  $R$ , заменим переменные, положив

$$y = Ly_1; \alpha = \alpha_1/L; (C - \beta)L^{n-1} = C_1.$$

Тогда уравнение (5) приобретает вид

$$\begin{aligned} v^{IV} - 2\alpha_1 v'' + \alpha_1^2 v = i\alpha R L^{2-n} [(\gamma_1 y_1^{1-n} - C_1)(v'' - \alpha_1^2 v) + \\ + \gamma n(n-1) y_1^{-1-n} v]. \end{aligned}$$

Отметим, что при таком преобразовании бесконечный интервал переходит в себя. Если выбрать  $L = R^{1/(n-2)}$ , то параметр  $R$  выпадет из уравнения и, следовательно, его решение, например, для наиболее опасного возмущения определит пару чисел  $\alpha_1$  и  $C_1$ , не зависящих от  $R$ . Тогда

$$\begin{aligned} C = \beta + C_1 R^{-(1-n)/(2-n)}; Y = Y_1 R^{-(1-n)/(2-n)}; \\ \alpha = \alpha_1 R^{1/(2-n)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда следует ряд выводов. Во-первых, в данном классе профилей волновое число  $\alpha$ , отвечающее наиболее опасному возмущению, возрастает с увеличением  $R$ . Следовательно, начиная с некоторого  $R$ , проявятся свойства локальности и результаты перестанут зависеть от размера области. Поэтому при больших  $R$  результаты носят универсальный характер и, в частности, справедливы и для течения в канале. Во-вторых, из (6) следует, что устойчивость потока повышается с ростом  $n$  и достигает максимума при  $n \rightarrow 1$ . В этом случае  $Y = Y_1$  и не зависит от  $R$ . Однако при  $n = 1$  все использованные уравнения, начиная с (4), теряют силу. Профиль скорости становится логарифмическим. Покажем, что устойчивость такого профиля не зависит от вязкости. Если в уравнении (6) осуществить преобразование подобия, заменив  $y$  на  $\nu y$ , а  $\alpha$  на  $\alpha/\nu$ , то вязкость сократится и будет входить в задачу лишь в виде аргумента  $\nu y$

функции  $U(vy)$ . Но логарифмический закон преобразует произведение в сумму, и вязкость становится аддитивной добавкой, которая может привести к изменению лишь фазовой скорости, но не декремента. Поэтому при больших  $R$  максимально устойчив логарифмический профиль скорости.

Прямые численные расчеты также демонстрируют глубокую устойчивость логарифмического профиля и стремление  $Y$  к конечному отрицательному пределу при  $R \rightarrow \infty$ . Это свойство отличает его от других выпуклых профилей с конечной скоростью на стенке, у которых  $Y \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ .

На рис. 93 нанесен декремент  $Y$  для локального пристенного максимума в зависимости от числа Рейнольдса. Изучался спектр профиля  $U = \ln(y + 10^{-7})$ , заданного на интервале  $0 \leq y \leq 1$ . На стенке ( $y=0$ ) для пульсаций ставились условия прилипания, а на оси — условия симметрии. При больших  $\alpha$  характер граничных условий на оси не имеет значения. При больших  $R$  волновое число, отвечающее максимуму зависимости  $Y(\alpha)$ , растет пропорционально  $R$ , а величина  $Y$  асимптотически становится постоянной в полном соответствии с формулами (6). Зависимость  $y_c(R)$  на рис. 93 свидетельствует о пристенном характере возмущений.

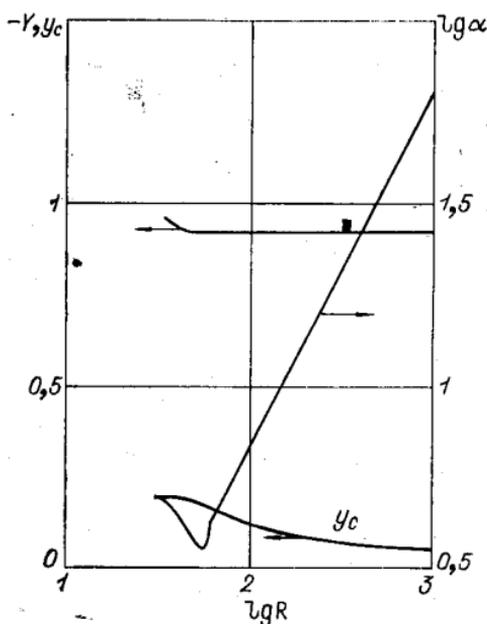


Рис. 93.

Необходимость выполнения условия прилипания на стенке для средней скорости в реальных потоках приводит к существованию вязкой зоны, где профили не являются логарифмическими. Рассчитаем [62] характеристики профиля скорости у стенки и константы логарифмического закона на основе принципа макси-

мальной устойчивости. Длину пути смещения  $l$  будем выбирать из семейства

$$l = \kappa (\eta - a\eta^2) (1 - e^{-\eta/A}), \quad (7)$$

где  $\eta = v, y/v$  — универсальная координата, а параметры  $\kappa$ ,  $a$ ,  $A$  подлежат определению. Уравнение Орра — Зоммерфельда в универсальных координатах сохранит вид (6), если положить  $v=1$ , а профиль скорости считать отнесенным к  $v$ .

При  $\eta=0$  ставятся условия прилипания  $v=v'=0$ , а условия на бесконечности переносятся на конечное расстояние  $\eta=R$  и выбираются в виде обычных условий для течений типа пограничного слоя (см. главу II):

$$(v'' - \alpha^2 v)' + \beta(v'' - \alpha^2 v) = 0; \quad (v'' - \beta^2 v)' + \alpha(v'' - \beta^2 v) = 0;$$

$$\beta = \sqrt{(\alpha^2 + i\alpha[U(R) - C])}; \quad \beta_r > 0.$$

Спектр собственных значений для параметров  $a=0$ ;  $\kappa=0,41$ ;  $A=30$ ;  $R=10^3$ , хорошо аппроксимирующих экспериментальные данные по турбулентным пограничным слоям, показан на рис. 94, где  $X$  и  $Y$  отнесены к  $U(R)$ , а  $\alpha$  построено по толщине потери импульса. Моды 3—5 внешние, и с увеличением числа Рейнольдса область их локализации отодвигается в бесконечность. В качестве меры устойчивости используется действие (3). При его вычислении внешние моды 3—5 не принимались в расчет. Спектр в пограничном слое имеет ту особенность, что декременты двух пристенных мод (1,

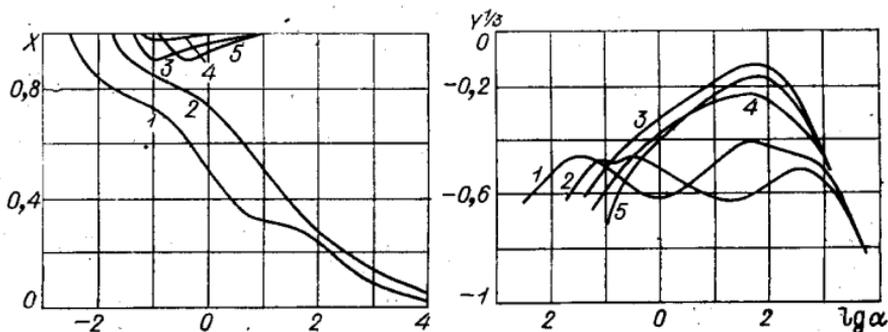


Рис. 94.

2) пересекаются, т. е. в разных диапазонах  $\alpha$  то одна, то другая наиболее опасна. Функционал рассчитывался по формуле

$$S = - \int_{\ln \alpha_1}^{\infty} d \ln \alpha / \max_n Y, \quad (8)$$

т. е. учитывалось максимальное для пристенных мод значение  $Y$  при каждом  $\alpha$ . Спецификой спектра в пограничном слое является его конечность при фиксированном  $\alpha$ . В частности, при  $\alpha=0$  не существует собственных значений. С увеличением  $\alpha$  собственные значения «возникают», и число их с ростом  $\alpha$  возрастает. Величина  $\alpha_1$  соответствует появлению первого собственного значения.

Минимизация функционала  $S$  осуществлялась методом наискорейшего спуска по трем переменным ( $\kappa$ ,  $a$ ,  $A$ ), в то время как величина  $R$  была фиксирована. Затем расчет проводился для больших значений  $R$ , пока не устанавливался параметр  $\kappa$  (рис. 95).

В результате расчетов получены следующие значения параметров:

$$\kappa = 0,41; A = 30; a = 0. \quad (9)$$

Значение  $a=0$  еще раз подтверждает максимальную устойчивость логарифмического распределения скорости.

Полученные значения  $\kappa$  и  $A$  хорошо согласуются с опытными данными.

Отметим, что роль указанных параметров различна. Величина  $A$ , как это видно из (7), влияет на распределение  $l$  только в локальной пристенной зоне. Она и введена Ван-Дристом в качестве поправки на вязкий подслей. Поэтому значение  $A$

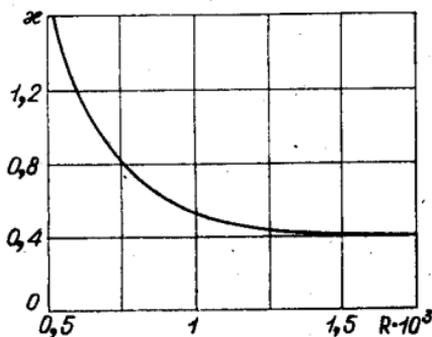


Рис. 95.

при заданном  $\kappa$  можно определить с помощью функционала  $\Pi$ , что и будет сделано ниже. Константа Прандтля — Кармана  $\kappa$  для заданной задачи — нелокальный параметр, поэтому ее значение может быть найдено только с помощью функционала  $S$ , учитывающего влияние как коротковолновых, так и длинноволновых возмущений. При этом значение  $\kappa$  практически не зависит ни от тонкой пристенной структуры потока, ни от его поведения во внешней части. Для иллюстрации этого факта рассмотрим течение в канале с профилем скорости, определяемым турбулентной вязкостью [61]

$$v_{\tau} = v + \kappa v \cdot y. \quad (10)$$

Такое распределение не учитывает особенностей вязкого подслоя и может быть интерпретировано как относящееся к каналу с шероховатыми стенками.

Результаты расчета функционала  $S$  по первой пристенной моде (здесь она наиболее опасна при всех  $\alpha$ )

и фиксированном расходе  $\int_0^1 U dy = 1$  при  $R = 10^4$  в зависимости от параметра  $\kappa$  отражены на рис. 96. Из рисунка видно, что  $\min S$

достигается при  $\kappa = 0,4$ , это свидетельствует в пользу высказанного утверждения относительно консервативности параметра  $\kappa$ . Кроме того, данный результат оправдывает принятую гипотезу о возможности автономного рассмотрения пристенной турбулентности, ибо получен не только на другом классе профилей скорости, но и при других граничных условиях.

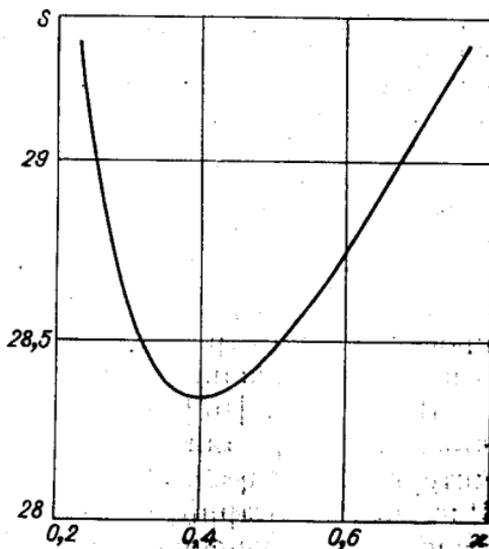


Рис. 96.

Заметим, что функционал  $S$  в силу своего интегрального характера слабо чувствителен к локальной деформации профиля скорости. Для более подробного анализа локальной структуры профиля лучше использовать локальный функционал  $\Pi$ .

### § 5. ЛОКАЛЬНЫЙ РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОГО ПРОФИЛЯ

Локальные свойства задачи гидродинамической устойчивости позволяют ставить вопрос о максимально устойчивой форме отдельных участков турбулентного профиля скорости. Подобная постановка вполне согласуется с известными законами консервативности пристенной турбулентности [122]. Заметим, что, приняв за основу принцип максимальной устойчивости, из свойств локальности получаем свойства консервативности.

Локальный функционал  $\Pi$  является приближенной реализацией функционала  $S$ . В знаменателе (4.8) стоит функция  $Y(\ln \alpha)$ . Как видно из рис. 92 и 94, эта зависимость имеет характерные максимумы в области больших волновых чисел. Для пристенных мод максимумы характеризуют наиболее опасные возмущения, локализованные в пристенной зоне. Поставим задачу найти максимально устойчивое распределение скорости в вязкой зоне на основе использования функционала  $\Pi = \max_{\alpha} Y(\alpha)$ . Рассмотрим класс профилей, определяемых длиной пути смещения

$$l^2 = \kappa^2 \eta^2 (1 - e^{-\eta/4})^n. \quad (1)$$

Считая величину  $\kappa$  заданной (равной 0,4), будем варьировать параметры  $A$  и  $n$  с целью их определения на основе минимизации функционала  $\Pi$ .

В расчетах [67] вариация параметров  $A$  и  $n$  приводила к деформации профиля скорости только внутри интервала  $0 < \eta < 100$ , т. е. была достаточно локальной. Рис. 89 иллюстрирует, что коротковолновые, наиболее опасные возмущения локализованы при  $\eta < 10$ , причем положение максимума  $Y(\alpha)$  соответствует  $\eta_c \approx 7$ , т. е. границе вязкого подслоя.

Положение кривой  $Y(\alpha)$  в районе коротковолнового максимума определяет степень устойчивости пристенного участка. Чем ниже лежит кривая, тем быстрее затухают пристенные возмущения.

На рис. 97 показаны зависимости функционала  $\Pi$  от комплекса  $B=A^n/\kappa^2$  при  $n=1$  (кривая 1), при  $n=2$ , (кривая 2). Комплекс  $B$  определяет длину пути омещения при  $\eta \ll A$ :

$$l^2 \approx \eta^{2+n}/B.$$

В обоих случаях наиболее устойчивое распределение скорости соответствует значению  $B \approx 640$ , но кривая 1 лежит ниже. Это свидетельствует, что максимальной устойчивости отвечает значение  $n=1$ .

Были проведены расчеты с нецелыми значениями  $n$  из интервала  $0 < n < 2$ . И в этом случае максимальная устойчивость фиксировалась при  $n$ , близких к единице.

Отметим, что случай  $n=1$  отвечает кубической зависимости напряжений Рейнольдса от расстояния до стенки в начале буферной зоны, в то время как аппроксимация Ван-Дрифта дает четвертую степень. Приведенные результаты свидетельствуют о том, что наиболее устойчивому распределению соответствует кубическая зависимость. Надо, однако, подчеркнуть, что показатель  $n$  аппроксимирует профиль во всей вязкой зоне

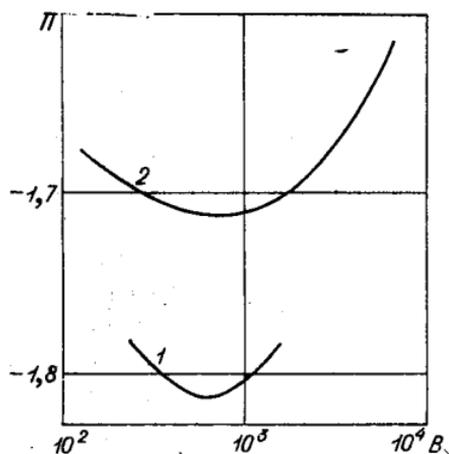


Рис. 97.

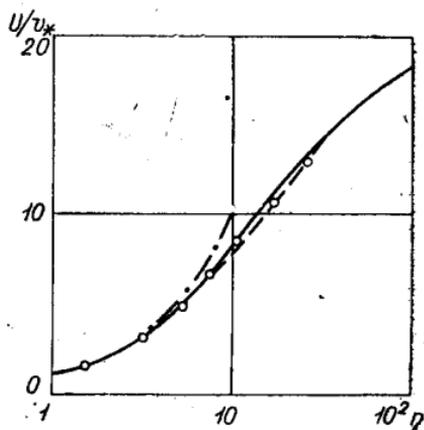


Рис. 98.

и поэтому, строго говоря, не может рассматриваться как величина, адекватная степени первого члена при разложении рейнольдсовых напряжений в ряд Тейлора у стенки. Однако эти величины близки друг другу. Интересно отметить, что развиваемый здесь подход, связанный с рассмотрением двумерных возмущений, дает результат  $n=1$ , который может реализоваться лишь в трехмерной турбулентности. Это не должно вызывать недоумение, поскольку анализ устойчивости в квазиламинарном приближении не связан ни с какими априорными предположениями о структуре мгновенных турбулентных пульсаций, формирующих тот или иной профиль скорости. Следует сказать, что максимально устойчивый профиль при  $n=1$  ( $A=100$ ) незначительно отличается от общепринятой аппроксимации Ван-Дрифта ( $n=2$ ).

Наиболее устойчивое распределение в вязком подслое и буферной зоне ( $n=1$ ;  $A=100$ ) показано на рис. 98. Пунктирная линия соответствует усредненному по большому числу данных экспериментальному профилю [163]. Точками отмечены экспериментальные данные, полученные в Институте теплофизики СО АН СССР методом стробоскопической визуализации [227]. Штрих-пунктир отвечает линейному закону.

Таким образом, пристенный участок универсального профиля скорости, рассчитанный на основе принципа максимальной устойчивости при использовании локального функционала  $\Pi$ , хорошо согласуется с экспериментальными данными и с результатами, полученными ранее с применением функционала  $S$ .

Наличие в спектре малых возмущений коротковолновых максимумов у приосевых мод делает возможным локальный анализ профиля скорости вблизи оси на основе принципа максимальной устойчивости с применением функционала  $\Pi$  [70]. Анализ устойчивости будем проводить в квазиламинарном приближении, имея в виду, что вблизи оси можно принять гипотезу о постоянной турбулентной вязкости, которая влияет на возмущение аналогично молекулярной. Таким образом, в уравнении Орра — Зоммерфельда число Рейнольдса можно считать построенным по турбулентной вязкости,

причем величина последней незначительна, так как рассчитанные характеристики слабо меняются в диапазоне чисел Рейнольдса, охватывающем несколько порядков.

Класс допустимых профилей определим исходя из обобщенного закона турбулентного трения Прандтля

$$(-l/v \cdot dU/dy)^k = y/h, \quad (2)$$

где  $h$  — полуширина канала;  $v$  — динамическая скорость;  $l$  — длина пути смещения, которую вблизи оси можно считать постоянной [122];  $y$  — координата, отсчитываемая от оси. Соотношение (2) выражает равенство турбулентного напряжения полному. Искомой величиной, определяющей закон турбулентного трения, является показатель  $k$ , в классическом случае равный двум.

Интегрируя (2), получим профиль скорости

$$U = U_{\max} - v \cdot h / (ln) \cdot (y/h)^n; \quad n = 1 + 1/k. \quad (3)$$

Соотношение (3) можно интерпретировать как главную часть разложения произвольного профиля в обобщенный степенной ряд вблизи оси канала.

Величина  $U_{\max}$  связана с выбором системы координат и не влияет на устойчивость. Поэтому, переходя к безразмерным параметрам, без потери общности можно записать

$$U = 1 - 1/n \cdot y^n. \quad (4)$$

В качестве масштаба длины выбрана величина  $h$ , в качестве масштаба скорости —  $U_0 = v \cdot h / l$ . Параметр  $n$  подлежит определению из требования максимальной устойчивости.

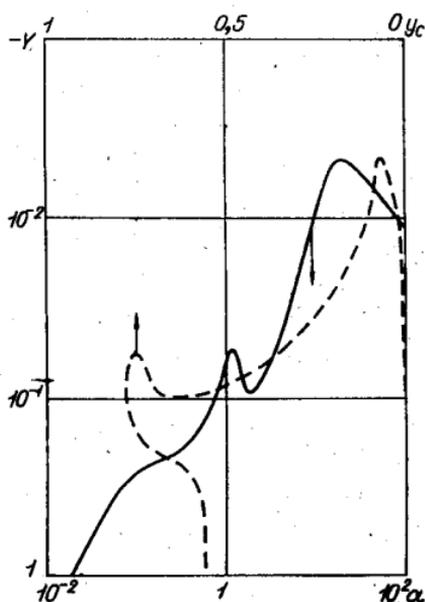


Рис. 99.

Поскольку для значений  $n < 2$  обращается в бесконечность  $U''(0)$ , то при расчетах в формуле (3)  $y$  заменялся на  $y + 10^{-9}$  ( $y > 0$ ).

На рис. 99 нанесена наиболее опасная приосевая мода  $Y(\alpha)$  для профиля (4) при  $R = 10^4$ ;  $n = 3/2$ . Тот факт, что  $U(y)$  не обращается в нуль на стенках  $y = \pm 1$  не играет роли, поскольку нас интересуют возмущения, локализованные у оси, для которых форма профиля вблизи стенки не существенна. Зависимость  $Y(\alpha)$  имеет два локальных максимума. Пунктирной линией нанесена зависимость  $Y(y_c)$  указывающая на положение критических точек. Меньший из локальных максимумов  $Y(\alpha)$  наблюдается при  $\alpha \sim 1$  и имеет критический слой вдали от оси. В силу свойств локальности этот максимум не может отвечать за устойчивость приосевой зоны. Второму локальному максимуму зависимости  $Y(\alpha)$  отвечает  $\alpha \approx 20$ ;  $y_c \approx 0,06$ , именно этот локальный максимум и будет служить нам мерой устойчивости профиля.

Зависимость величины данного максимума  $\Pi = \max_{\alpha} Y$  от  $n$  при разных числах Рейнольдса показана на рис. 100. Кривые 1—4 соответствуют значениям  $R = 10^3$ ;  $10^4$ ;  $10^5$ ;  $10^6$ . Как видим, профили с  $n < 1,12$  неустойчивы ( $\Pi > 10$ ) при указанных числах Рейнольдса. Максимальная устойчивость наблюдается при  $n \approx 3/2$ . Это соответствует известному экспериментальному закону Дарси [304] для средней скорости в турбулентном ядре и закону Прандтля — Кармана для турбулентного трения ( $k = 2$ ).

Можно заметить, что величина  $n$ , определяемая из требования максимальной устойчивости, зависит от числа Рейнольдса, хотя и весьма слабо (рис. 101). Эту зависимость можно получить исходя из соображений подобия. Действительно, пусть в качестве характерной длины выбрана величина  $\lambda$ , а в качестве характерной скорости —  $U_0(\lambda/h)^n$ . Тогда безразмерный профиль сохраняет вид (4), но роль числа Рейнольдса будет выполнять комплекс  $R_1 = U_0 \lambda / \nu \times (\lambda/h)^n$ .

В силу свойств локальности декременты коротковолновых возмущений не будут зависеть от новой безраз-

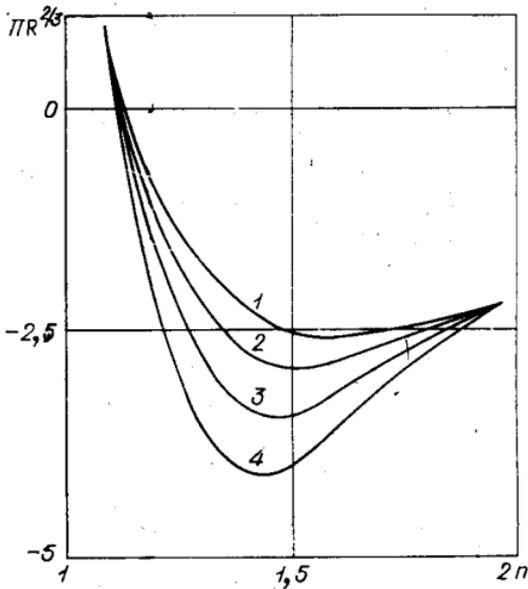


Рис. 100.

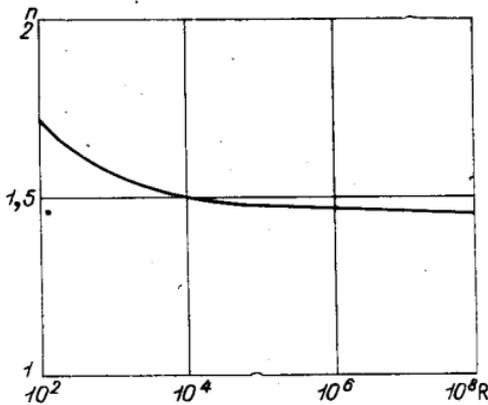


Рис. 101.

мерной ширины канала. Поэтому, выбирая  $\lambda$  так, чтобы  $R_1 = 1$ , находим

$$\lambda/h = R^{-1/(n+1)}. \quad (5)$$

Величина  $F = \Pi(h/\lambda)^n$ , соответствующая функционалу  $\Pi$  в новых масштабах, будет функцией только показа-

теля  $n$ . Функция  $F(n)$  может быть рассчитана по любой из кривых рис. 100, и тогда значение  $n$ , обеспечивающее максимальную устойчивость, находится как корень уравнения

$$(n+1)^2 F'(n)/F(n) = \ln R. \quad (6)$$

Расчеты по формуле (6) находятся в точном соответствии с зависимостью на рис. 101.

Следует отметить, что соотношение (5) оценивает размер приосевого участка профиля, который существенно влияет на поведение коротковолновых приосевых возмущений. Значение  $\alpha$ , отвечающее наиболее опасному возмущению, пропорционально  $R^{1/(n+1)}$ . Следовательно, с ростом  $R$  таким путем определяется все более узкий приосевой участок профиля скорости.

Известно, что в непосредственной окрестности оси канала экспериментально определенное турбулентное трение отклоняется от квадратичного закона Праудтля. Были попытки описать трение в приосевой области, например, с помощью представления вида [163, 229]:

$$\tau = l^2 U' \sqrt{[(U')^2 + (U''l)^2]}.$$

Хорошо известно также, что степенные законы для профиля скорости в пристенной зоне и в районе ядра не являются универсальными по отношению к числу Рейнольдса. Эти факты вполне согласуются с полученными результатами. Тем не менее с хорошей точностью для показателя  $n$  можно принять значение  $3/2$  в широком диапазоне изменения  $R$ . Таким образом, и в этом случае принцип максимальной устойчивости позволяет теоретически рассчитать известные экспериментальные зависимости.

Подводя итоги использованию принципа максимальной устойчивости в его квазиламинарном приближении, следует отметить, что на данной основе удастся теоретически определить многие константы турбулентности, используемые в полуэмпирических теориях для описания усредненного профиля скорости.

Для более полного описания характеристик турбулентного потока необходимо учитывать непосредственное взаимодействие наложенного сигнала с турбулентными пульсациями.

### § 6. О НЕПОСРЕДСТВЕННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НЕСЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА С ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

В связи с появлением опытных данных Рейнольдса и Хусейна вопрос о правомерности квазиламинарного приближения и о выборе адекватной модели взаимодействия неслучайного сигнала с турбулентным потоком приобрел реальную почву. Уже в работах этих авторов [385, 386, 505] сделана попытка сопоставить экспериментальные результаты с расчетами по различным моделям.

Следует иметь в виду, что в соответствии с методикой получения экспериментальных данных теоретическому изучению подлежит задача о пространственном развитии возмущений вдоль по течению (см. § 8 главы II), когда наложенный сигнал имеет вид  $v_n(y) \exp i(\alpha x - \omega t)$ , где  $\omega$  — заданная вещественная частота возбуждаемых колебаний;  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$  — искомое собственное значение. Кривые на рис. 102 изображают зависимость амплитуды продольной компоненты скорости периодического возмущения от поперечной координаты для различных сечений. Отношения расстояния от источника возмущения  $x$  к полуширине канала указаны цифрами. Декременты  $\alpha_i$  и волновые числа  $\alpha_r$ , полученные в результате усреднения по сечениям, для разных значений частоты  $\omega$  имеют следующий вид:

$\omega$	0,8470	1,692	2,540	3,390
$\alpha_i$	0,9810	1,870	2,720	3,570
$\alpha_r$	0,0727	0,122	0,196	0,285

При рассмотрении эволюции сигнала в турбулентном потоке будем исходить из уравнения (2.4) после его усреднения по ансамблю. Подлежащую моделированию

правую часть уравнения (2.4) удобно представить в форме

$$K_k = - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle v_j^T v_k + v_j v_k^T \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau'_{kj}, \quad (1)$$

где через  $\tau'_{kj}$  обозначены возмущения тензора турбулентных напряжений. В работах [385, 386, 505] были рассмотрены три модели: а) квазиламинарная с  $\tau_{kj} = 0$ ; б) модель с постоянной турбулентной вязкостью

$$\tau'_{kj} = \nu_T D'_{kj}; \quad D'_{kj} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k}; \quad \nu_T = \text{const}; \quad (2)$$

в) модель с переменной турбулентной вязкостью

$$\tau'_{kj} = \nu_T(y) D'_{kj}, \quad (3)$$

где  $\nu_T(y)$  задано выражением (3.4).

Результаты расчетов по моделям (2) и (3) были близкими. Декременты затухания, рассчитанные по квазиламинарной модели, неожиданно оказались значительно выше экспериментальных, а также рассчитанных по моделям с турбулентной вязкостью.

Поэтому в работе [63] была осуществлена проверка этих результатов. Наряду с упомянутыми моделями ис-

следовалась также модель, которая получается на основе обобщенной формулы Прандтля, связывающей полные турбулентные напряжения  $\tau$  с тензором скоростей деформаций

$$\tau = l^2 |D| D, \quad (4)$$

где через  $|D|$  обозначен квадратный корень из второго инварианта тензора  $D$ . Величина  $l$ , задаваемая соотношением (3.2), считается от состояния движения не зависящей и поэтому не варьируется.

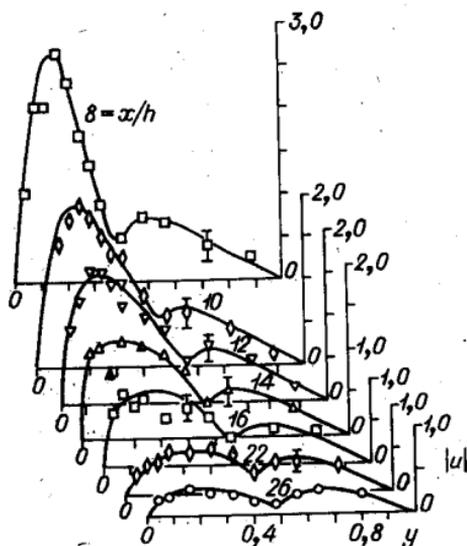


Рис. 102.

В результате для двумерного случая эта модель дает

$$\tau' = 2l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Стоит отметить, что если для описания одномерного среднего движения безразлично, какую величину задавать в качестве основной ( $l$  или  $v_t$ , поскольку между ними существует взаимно однозначная связь), то для описания поведения возмущений форма закона турбулентного трения имеет существенное значение. При использовании формулы Буссинеска  $\tau = v_t D$  уравнения возмущенного движения сохраняют свой вид, тогда как формула (5) приводит к другим уравнениям с изотропной турбулентной вязкостью  $v_t = 2l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|$ . Формально это связано с тем, что в формуле Буссинеска в отличие от формулы Прандтля при возмущении тензора  $D$  коэффициент  $v_t$  не варьируется.

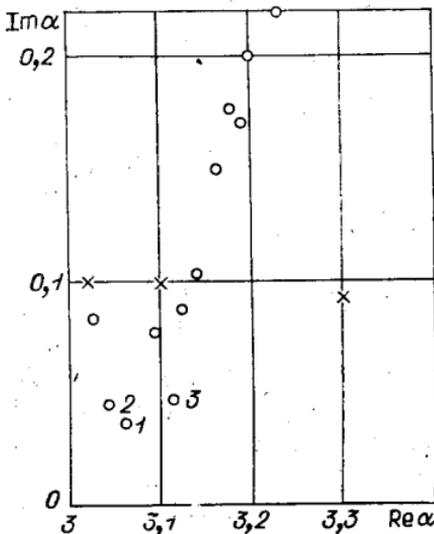


Рис. 103.

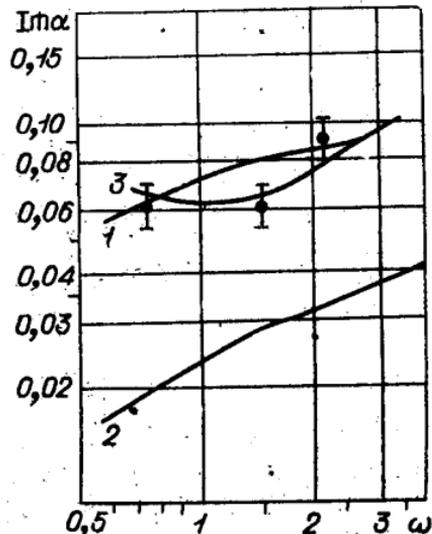


Рис. 104.

Как показали проверочные расчеты, в работе [385] были вычислены далеко не самые опасные возмущения. На рис. 103 кружками обозначены собственные значения, вычисленные по квазиламинарной модели для течения в канале при  $R=13\,800$  и  $\omega=3$ . Они пронумерованы в порядке возрастания декрементов  $\alpha$ . Как и для временной задачи, собственные значения делятся на два класса, соответствующие приосевым и пристенным модам. Для пристенных мод с увеличением частоты  $\omega$  фазовая скорость  $X=\omega/\alpha$  уменьшается и критический слой приближается к стенке, приосевые моды характеризуются ростом фазовой скорости с частотой и локализацией возмущений в окрестности оси.

Выяснилось, что в работе [385] по квазиламинарной модели была рассчитана не первая, а, по крайней мере, тридцатая мода, которая, правда, оказалась первой из пристенных.

Расчеты по моделям с турбулентной вязкостью (2) и (3) подтвердили результаты, приведенные в статье [385]. Первая мода оказалась локальной и приосевой, именно поэтому модели (2) и (3) дали практически одинаковые результаты.

Эти расчеты и экспериментальные данные показывают, что, во-первых, в опытах сигнал состоял из нескольких мод и, во-вторых, наименее затухающими были приосевые моды. Поэтому декременты, вычисленные как некоторые средние по сечению, скорее, отражают взаимодействие мод, чем затухание. Более представительные результаты можно получить, используя для определения декрементов только данные, относящиеся к приосевой области. Анализ графиков, подобных приведенному на рис. 102, позволил определить декременты затухания в точке  $y/h=0,1$  (расстояние отсчитывается от оси) для безразмерных частот  $\omega=0,75; 1,5; 2,25$  (рис. 104). Вертикальные отрезки дают представление о величине разброса. Для частоты  $\omega=3$  при  $y/h=0,1$  сигнал возрастает по длине, поэтому эти данные в расчет не принимаются. Как показали расчеты, при помощи модели (2) с турбулентной вязкостью  $\nu_t=40\nu$  можно добиться относительно неплохого согласия с данными эксперимента. Это видно из рис. 104, где результаты

расчета нанесены в виде кривой 1 (кривая 2 соответствует первой моде по квазиламинарному приближению). Следует, правда, отметить, что, согласно [507], в этих условиях турбулентная вязкость, определенная по среднему профилю, вдвое больше:  $\nu_t = 80\nu$ . Противоречие усугубляется при использовании формулы (5), поскольку она содержит коэффициент 2. Отсюда следует, что рассмотренные модели с турбулентной вязкостью неудовлетворительны в принципиальном плане.

Физически взаимодействие внешнего сигнала с турбулентностью связано с тем, что возмущение вовлекается в каскадный процесс и «размазывается» по спектру. Для точного решения задачи потребовалось бы найти каждую из порождаемых гармоник, а с ними и сам каскадный процесс, что в настоящее время неосуществимо. Однако можно попытаться учесть влияние турбулентности на изучаемый сигнал лишь эффективно с помощью некоторой модели. При этом, очевидно, модель должна учитывать, что характер взаимодействия наложенного сигнала с потоком должен зависеть от свойств самого сигнала, например от его частоты. Поэтому модели с турбулентной вязкостью необходимо строить с учетом зависимости  $\nu_t(\omega)$ . Попытки такого рода известны [310]. Однако они приводят к сложным и искусственным зависимостям. На наш взгляд, это связано с тем, что введение турбулентной вязкости, повышающее дифференциальный порядок моделируемого члена  $K_k$  в (1), не отражает характера этого объекта, а просто заменяет один механизм передачи импульса другим.

Если поставленная задача об автономном рассмотрении эволюции сигнала с заданной частотой при учете лишь эффективного взаимодействия с остальным спектром имеет решение, то соответствующее модельное уравнение должно допускать гармонические решения. Исходя из этого соображения и вида формулы (1), можно сформулировать требования, которым должна удовлетворять искомая модель: 1) линейность по скорости возмущения; 2) линейность по интенсивности турбулентных пульсаций; 3) сохранение порядка дифференцирования; 4) локальность; 5) дивергентность; 6) инвариантность; 7) сохранение порядка убывания

к стенке и свойств симметрии; 8) отсутствие полюсов и вещественность моделирующего выражения при всех значениях параметров.

Исходя из требования 1, можно записать моделирующее равенство

$$\langle v_j^T v_k + v_k^T v_j \rangle = \omega_j \langle v_k \rangle + \omega_k \langle v_j \rangle, \quad (6)$$

где вектор  $\omega_k$  имеет смысл некоторой усредненной скорости, не зависящей от сигнала  $\langle v \rangle$ , от однородных переменных и целиком определяемой лишь усредненными характеристиками турбулентного потока. Вообще говоря, вектор  $\omega_k$  должен зависеть от всех моментов турбулентности, однако в качестве первого пробного шага ограничимся при его построении лишь первым и вторым моментами: вектором средней скорости потока и тензором напряжений Рейнольдса с его инвариантами. Согласно требованию 2 величина  $|\omega|$  не должна зависеть от средней скорости  $U$  и может поэтому определяться лишь компонентами тензора рейнольдсовых напряжений. Вектор  $U_k$  может оказывать лишь ориентирующее воздействие. По порядку величины  $|\omega|$  должен быть близок к среднеквадратичному значению пульсаций скорости. Можно указать только одну комбинацию, определяющую вектор  $\omega$  и удовлетворяющую условиям (1) — (7):

$$\omega_k = \gamma \langle v_k^T v_j^T \rangle / \sqrt{\langle v_n^T v_n^T \rangle} \cdot U_j / |U|, \quad (7)$$

где  $\gamma$  — численный коэффициент;  $\langle v_n^T v_n^T \rangle$  — первый инвариант тензора  $v_k^T v_j^T$ , представляющий собой удвоенную кинетическую энергию турбулентных пульсаций. Для течения в канале коэффициент  $\gamma$  в (7) можно определить из следующих соображений. Считая, что в ядре потока турбулентность близка к однородной и изотропной  $\langle (v_x^T)^2 \rangle \simeq \langle (v_y^T)^2 \rangle \simeq \langle (v_z^T)^2 \rangle$ , потребуем, чтобы на оси выполнялось равенством  $\omega_x = \sqrt{\langle (v_x^T)^2 \rangle}$ , откуда с учетом (7) находим  $\gamma = \sqrt{3}$ .

Подстановка (6) в уравнение (2.4) эквивалентна замене  $U_k$  на  $U_k + \omega_k$ , так что вектор  $\omega_k$  играет роль добавочной скорости. Существенно, что при течении в

канале  $\omega$  имеем две компоненты:  
продольную

$$\omega_x = \gamma \langle (v_x^T)^2 \rangle / \sqrt{e}; \quad e = \langle (v_x^T)^2 + (v_y^T)^2 + (v_z^T)^2 \rangle \quad (8)$$

и поперечную

$$\omega_y = \gamma \langle v_x^T v_y^T \rangle / \sqrt{e}. \quad (9)$$

Наличие поперечной скорости (9) — наиболее характерный и существенный признак данной модели по сравнению с классическим случаем.

Недостатком предлагаемой модели по сравнению с моделями турбулентной вязкости является необходимость при решении задачи гидродинамической устойчивости для турбулентного потока использования большей эмпирической информации о самом потоке. Для численного решения задачи эта информация бралась из работ [110] и [431]. На рис. 103 крестиками нанесены первые собственные значения для  $\omega=3$ , декременты которых весьма близки. На рис. 104, кривой 3 показана зависимость декремента затухания от частоты для первой моды. В диапазоне частот, исследованном экспериментально, модель хорошо описывает затухание вблизи оси.

Экспериментальных данных еще слишком мало, чтобы можно было сделать окончательные выводы. Однако данный подход, осуществляющий прямое моделирование члена, описывающего взаимодействие внешнего возмущения с пульсациями, позволяет объяснить явление относительно просто, без введения больших коэффициентов, сложно зависящих от частоты.

Отметим, что использование предложенной модели вместо квазиламинарного приближения для реализации принципа максимальной устойчивости наталкивается на большие технические трудности. Даже в квазиламинарном приближении процедура нахождения наиболее устойчивого течения требует большого объема вычислений.

К сожалению, задачу не удалось сформулировать в канонической вариационной форме. Отсутствие уравнений Эйлера—Лагранжа заставляет осуществлять прямую минимизацию выбранного функционала. Если

пространство варьируемых параметров имеет большую размерность, то задача становится практически неразрешимой. Поэтому в реальных расчетах приходится ограничиваться двух-, трехпараметрическими классами профилей скорости, по возможности включающими экспериментальные, и сводить задачу к теоретическому определению этих параметров. Таким образом, задача сводится к вычислению констант полуэмпирических теорий.

Спектр малых возмущений, как правило, носит сложный характер. Так как при численном расчете, в принципе, можно учесть лишь конечное число спектральных уровней и желательно минимальное, то принималась во внимание лишь наиболее опасная мода возмущений или огибающая по декрементам разных мод. Наличие пересечений спектральных зависимостей в разных точках для различных значений параметров вызывает значительные затруднения при конкретных расчетах. Все это приводит к огрублению результатов и, хотя позволяет вычислить отдельные характеристики турбулентности, делает проблематичным массовый расчет широкого круга задач.

Кроме того, в квазиламинарном приближении рассчитывается лишь профиль средней скорости, но зачастую представляют интерес и другие моменты, а также характеристики пульсационного движения. Более конструктивный подход состоит в аппроксимации турбулентного режима автоколебаниями с конечным числом степеней свободы. При этом, как показано в главе IV, аппроксимирующее решение по-прежнему должно быть выбрано из определенного класса возможных. В этих целях мы опять используем принцип максимальной устойчивости, но уже на другом уровне. Процедура выбора принципиально упрощается тем, что среди неустойчивых решений всегда существует одно нейтральное в модельном смысле решение, которое и будет максимально устойчивым, так что нет необходимости специально вводить меру устойчивости. Важно подчеркнуть, что сама идея максимальной устойчивости даже без непосредственной конкретизации минимизируемого функционала уже плодотворна для объяснения ряда закономерностей турбулентности. Так, в § 5 настоящей гла-

вы на ее основе удалось объяснить логарифмическое распределение средней скорости как наиболее устойчивое, в дальнейшем такой пример — определение профиля у шероховатой стенки.

## § 7. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ПРИСТЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Расчет автоколебательного режима конечной амплитуды даже при небольшом числе учитываемых гармоник весьма сложная и трудоемкая задача. Однако, как показано ниже, она может быть значительно упрощена при рассмотрении ближайшей пристенной области турбулентного течения. Решающую роль при этом играют два момента.

Первый заключается в возможности автономного рассмотрения пристенной части течения, а именно вязкого подслоя и буферной зоны при больших числах Рейнольдса. Об этом свидетельствуют консервативные свойства пристенной турбулентности (см. § 1 наст. главы), заключающиеся в том, что течение в окрестности стенки практически не зависит от внешних влияний. Об автономности пристенной области свидетельствует и энергетический анализ, из которого следует, что внешняя граница буферной зоны представляет собой адиабатическую стенку, поскольку средний поток пульсационной энергии через нее равен нулю. Следовательно, пристенный вязкий слой является энергетически сбалансированной подобластью турбулентного потока. Для математического замыкания задачи на границе буферной зоны должны быть поставлены краевые условия. Они здесь формулируются на основе пренебрежения влиянием вязкости и требования гладкого сопряжения с асимптотическими закономерностями на бесконечности, вытекающими из соображений размерности. Требование гладкого сопряжения — фактически воплощение принципа максимальной устойчивости, поскольку из предыдущего известно, что особенности в профиле скорости приводят к неустойчивости течения.

Другим моментом, позволяющим существенно упростить задачу, является наблюдаемая в опыте сравнительно простая и почти упорядоченная структура турбулентных пульсаций в непосредственной окрестности стенки. В последнее время внимание исследователей (в большей степени это касается экспериментаторов) обращено на изучение упорядоченных, часто повторяющихся структур, наблюдаемых в турбулентном режиме. По-видимому, впервые на роль таких образований для построения простых моделей указал Таунсенд [217]. Сейчас такие структуры практически анализируются во всех крупных исследовательских центрах, о чем, в частности, свидетельствует конференция по упорядоченным структурам турбулентности в Саутгемптоне в 1974 г. [309]. Большое внимание этой проблеме было уделено на семинаре по моделям сплошной среды в Ленинграде [180].

Характерные структурные образования наблюдаются как в свободной, так и в пристенной турбулентности, но наибольшее внимание привлекает существование таких структур в вязком слое. Роль этой зоны была осознана исследователями, когда выяснилось, что пульсации скорости здесь весьма велики [332], более того, достигают максимальных значений как в процентном отношении к местной усредненной скорости, так и по абсолютной величине. Оказалось [432], что в этой же зоне сосредоточены основная генерация и диссипация турбулентной энергии. Но, несмотря на столь интенсивные турбулентные процессы, именно в вязкой пристенной зоне наиболее отчетливо прослеживаются упорядоченные образования. Сейчас накопилось уже довольно много экспериментальных исследований по структуре вязкого слоя. По-видимому, начало этому «буму» положили работы [415, 454, 485]. В них с помощью различной методики — визуальной и электрохимической — было обнаружено существование в вязком подслое образований в виде вытянутых по потоку длинных вихрей. В более поздних исследованиях эти результаты были подтверждены и детализированы [263, 296, 327, 455, 556, 562, 571, 581]. Статистическая структура пульсаций в вязком подслое была проанализирована в статьях [181, 182] и в цикле

исследований, проведенных в Институте теплофизики СО АН СССР [125, 226, 227].

Вихревые полосы, наблюдаемые в вязком подслое, конечно, не вполне стационарные образования, а, скорее, напоминают полощущиеся на ветру флаги. Тем не менее они имеют определенные масштабы, которые воспроизводятся от опыта к опыту с небольшим разбросом. Продольный размер вихрей в универсальных масштабах составляет  $\sim 10^3$ , а трансверсальный  $\sim 10^2$ . Исследование двумерных спектров пульсаций продольной компоненты скорости [455] позволило определить скорость конвекции возмущений в подслое. Эта скорость не зависит от расстояния до стенки, что свидетельствует о волновом характере пульсационного движения.

Анализ спектра и непосредственное сопоставление осциллограмм [181] также указывает на то, что высокочастотная часть спектра в вязком подслое отсутствует и достаточно четко проявляется почти периодическая структура. Характерная частота волнового движения в универсальных координатах примерно 0,1.

Все эти экспериментальные данные указывают на возможность аппроксимации пульсаций в вязкой зоне небольшим набором волн, а в простейшем случае — моногармоническими колебаниями.

Первые попытки теоретического анализа пульсационного движения в вязком подслое были предприняты в работах [329, 366, 537]. Поведение возмущений авторы описывали в рамках уравнений Стокса, полагая, что конвективными членами в ближайшей окрестности стенки можно пренебречь. Это справедливо лишь для глубокой части вязкого подслоя, когда  $\eta < 1$ . Распределение мгновенного трения на стенке или пульсации давления задавались априорно, исходя из опытных данных и общих соображений, а вязкому подслою отводилась роль демпфера. В работах [329, 366] предполагалось, что возмущения дискретными во времени порциями приходят в вязкий подслой из внешней области и там затухают, а Стернберг рассматривал постоянно действующие возмущения на верхней границе.

Следующий шаг был сделан в работе Шуберта и Коркоса [521], где были учтены конвективные члены в

уравнениях для пульсаций, обусловленные усредненной скоростью. Предыдущий анализ Коркоса [295] показал, что поле турбулентных флуктуаций давления практически не зависит от поперечной координаты в слое, значительно превышающем толщину вязкой зоны. Это обстоятельство использовалось для упрощения системы уравнений. Профиль средней скорости был задан с помощью аппроксимации опытных данных. Параметры колебаний оставались произвольными и выбирались из эмпирических соображений. Несмотря на это, количественного согласия с опытами достигнуть не удалось, хотя был получен качественно верный результат о максимальной интенсивности продольной пульсации в вязкой зоне.

Дальнейшие исследования закономерности течения в вязком слое [49, 50, 93, 472] фактически ограничивались выделением показателя степени  $n$  первого члена разложения напряжений Рейнольдса в ряд по поперечной координате. В работе [472] из статистических соображений утверждалось, что  $n=4$ . Кадер [93], анализируя решение в рамках приближения [521] в терминах функции Эйри, показал, что нет оснований считать коэффициент при  $\eta^3$  равным нулю. К подобным же выводам пришел Гешев [50, 51] на основе оценок, использующих опытные данные.

Интересная модель движения в пристенной зоне была построена в работе [198]. Априорно полагалось, что вторичное течение имеет вид ячеек, перпендикулярных основной скорости, внутри которых завихренность постоянна. В силу этой модели, а также предположения о стационарности поля скоростей и независимости его от продольной координаты компоненты скорости  $u_y$ ,  $u_z$  рассчитывались отдельно в рамках уравнений Эйлера при условиях непроницаемости на границах ячеек. Затем из соответствующего уравнения Навье — Стокса находилась продольная скорость. Задача содержит два эмпирически определяемых параметра — отношение размеров ячейки и завихренность. Существенным недостатком, отмеченным самим автором, является отсутствие энергетического баланса, точнее, механизма поддержания вихревого движения. Поэтому вязкий слой играет лишь диссипативную роль.

Завершая обзор теоретических исследований по структуре вязкого подслоя, отметим, что они ставили целью объяснить экспериментально наблюдаемые особенности пульсационного движения исходя из предположения, что оно определяется заданными внешними воздействиями. На этом пути даже при использовании эмпирической информации удавалось в лучшем случае отразить лишь определенные качественные эффекты.

В предлагаемой здесь приближенной теории [72—74, 349] не используется ни эмпирический материал, ни априорные модели движения. Разыскивается решение уравнений Навье—Стокса, имеющее автоколебательный, самоподдерживающийся, характер. В общей каскадной теории автоколебаний конечной амплитуды, изложенной в главе IV, был показано, что уже в рамках моногармонических колебаний удается получить качественно верные результаты для вязкой пристенной зоны. Решение, однако, «портилось» из-за того, что оно непрерывно продолжалось и во внешнюю область, где моногармоническое приближение неприемлемо, поскольку в этой невязкой для пульсаций зоне уравнение Рейнольдса приобретало чисто вязкий характер. Поэтому естественно, опираясь на энергетическую сбалансированность и консервативные свойства, попытаться рассмотреть вязкую зону автономно с условиями невязкости на ее внешней границе как для пульсационных, так и для средних величин.

Будем исходить из уравнений для пульсационного движения (III. 4. 1) и (III. 4. 2), которые здесь удобно выписать в следующем размерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{v \partial x}{\partial t} + U \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y U' &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x - \frac{\partial}{\partial x_j} (v_x v_j - \overline{v_x v_j}); \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + U \frac{\partial v_y}{\partial x} &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y - \frac{\partial}{\partial x_j} (v_y v_j - \overline{v_y v_j}); \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + U \frac{\partial v_z}{\partial x} &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z - \frac{\partial}{\partial x_j} (v_z v_j - \overline{v_z v_j}); \quad (1) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0; \\ \nu U' &= v_*^2 + \overline{v_x v_y}; \quad \overline{v_y v_z} = 0. \end{aligned}$$

На стенке ставятся условия прилипания и задается величина  $v_*^2$ , т. е. вновь формируется задача Прандтля (см. § 4 наст. главы), но уже на «микроскопическом» уровне.

Разыскивая приближенное решение в виде моногармонической волны:

$$\begin{aligned} v_x &= [u(y)T + u^*(y)T^*] \cos \beta z; \\ v_y &= [v(y)T + v^*(y)T^*] \cos \beta z; \\ v_z &= [w(y)T + w^*(y)T^*] \sin \beta z; \\ p &= [q(y)T + q^*(y)T^*] \cos \beta z; \\ T &= \exp [i\alpha(x - Xt)], \end{aligned} \quad (2)$$

получим, подставляя (2) в (1) и проектируя на базисную гармонику, уравнения для амплитуд

$$\begin{aligned} i\alpha(U - X)u + U'v &= -i\alpha q + v(u'' - k^2u); \\ i\alpha(U - X)v &= -q' + v(v'' - k^2v); \\ i\alpha(U - X)w &= \beta q + v(w'' - k^2w); \\ i\alpha u + \beta w + v' &= 0; \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2; \\ vU' &= v_*^2 + 1/2 \cdot (uv^* + u^*v). \end{aligned} \quad (3)$$

Нетривиальное решение нелинейной системы (3) и представляет искомый автоколебательный режим. Мы будем решать эту нелинейную систему методом итераций. На первом этапе пренебрегаем нелинейными членами в последнем уравнении (3) и решаем полученную линейную задачу. На следующем этапе определяется новый профиль скорости  $U(y)$ , и таким образом итерации продолжают до сходимости. Замечательным свойством рассматриваемой задачи является то, что уже первая итерация дает решение, хорошо согласующееся с опытными данными. Следовательно, достаточно решить линейную систему, получающуюся из уравнений Навье — Стокса при пренебрежении квадратичными по пульсациям членами. Профиль средней скорости при этом по-

лучается линейным. Умножая первое уравнение (3) на  $i\alpha$ , а третье на  $\beta$  и складывая, получим

$$q = 1/k^2 \cdot \{v\theta' - i\alpha[(U-X)v' - U'v]\}; \quad \theta = v'' - k^2v. \quad (4)$$

Исключая амплитуду пульсаций давления из (3) и учитывая, что  $U'' = 0$ , приходим к системе

$$v\theta'' - [vk^2 + i\alpha(U-X)]\theta = 0; \quad (5)$$

$$v'' = k^2v = \theta; \quad (6)$$

$$vw'' - [vk^2 + i\alpha(U-X)]w = \beta/k^2 \cdot \{v\theta' - i\alpha[(U-X)v' - U'v]\}. \quad (7)$$

На стенке в силу условий прилипания

$$v = v' = w = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (8)$$

На бесконечности ставятся условия отсутствия влияния вязкости, которые следуют из (5) и (7), если положить  $v = 0$ :

$$\theta = 0; \quad w = \beta/k^2 \cdot [U'v/(U-X) - v'] \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \quad (9)$$

При заданных значениях  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $X$  решение системы (5) — (9) определяется с точностью до комплексного множителя. Величина этого амплитудного множителя, естественно, не может быть определена в рамках решения линейной задачи. Нормировочное условие следует из последнего уравнения (3), если потребовать, чтобы и в уравнении Рейнольдса вязкий член становился пренебрежимо малым вдали от стенки.

Теперь задачу удобно привести к безразмерному виду, вводя универсальные координаты (масштаб скорости  $v_*$ , длины —  $v/v_*$ ):

$$\theta'' - [k^2 + i\alpha(\eta - X)]\theta = 0; \quad (10)$$

$$v'' - k^2v = \theta; \quad (11)$$

$$w'' - [k^2 + i\alpha(\eta - X)]w = \beta/k^2 \cdot \{\theta' - i\alpha[(\eta - X)v' - v]\}; \quad (12)$$

$$\dot{u} = i/\alpha \cdot (v' + \beta w); \quad (13)$$

$$v = v' = w = 0 \quad \text{при } \eta = 0; \quad (14)$$

$$\theta=0; \omega=\beta/k^2 \cdot [v/(\eta-X)-v'] \text{ при } \eta \rightarrow \infty; \quad (15)$$

$$\tau \equiv -(u_r v_r + u_i v_i) = 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Здесь мы для простоты оставили для переменных и параметров прежние обозначения, за исключением поперечной координаты  $\eta = v_y/v$ .

При осуществлении первой итерации возникает вопрос о совместимости рассмотрения линеаризованных уравнений и условий невязкости вдали от стенки. Вообще говоря, области, где несущественна нелинейность и несущественны вязкие члены, могут не перекрываться. Однако, как будет показано далее, вязкие компоненты решения при удалении от стенки затухают быстрее, чем экспоненциально, и условия (15) выполняются с хорошей точностью уже там, где профиль скорости незначительно отличается от линейного. Действительно, решением уравнения (10) при условии (15) является убывающая функция Эйри

$$\theta = A \cdot Ai\{\alpha^{-2/3}[k^2 + i\alpha(\eta-X)]\},$$

которая при больших  $\eta$  имеет асимптотическое представление

$$\theta \sim A \exp[-1/3 \cdot \sqrt{2\alpha}(1+i)(\eta-X)^{3/2}]. \quad (17)$$

На рис. 105 показан график функции  $\theta(\eta)$  для значений параметров  $\alpha=0,005$ ;  $\beta=0,0003$ ;  $X=25,7$ . Значение модуля  $\theta$  быстро падает при удалении от стенки. В окрестности критической точки  $\eta_c=X$  это падение несколько замедляется, здесь же сменяется направление изменения фазы. Значение фазы определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной, как это типично для случаев, когда разыскивается периодическое решение. Величина этой константы несущественна, так как средние значения от нее не зависят.

Несмотря на быстрое затухание функции  $\theta$ , которая в двумерном случае имеет физический смысл завихренности, пульсационные скорости не затухают на бесконечности. Более того, в рамках линейного приближения они экспоненциально нарастают при больших  $\eta$ . Из (11) следует, что асимптотически  $v \sim \exp(k\eta)$ . Что касается

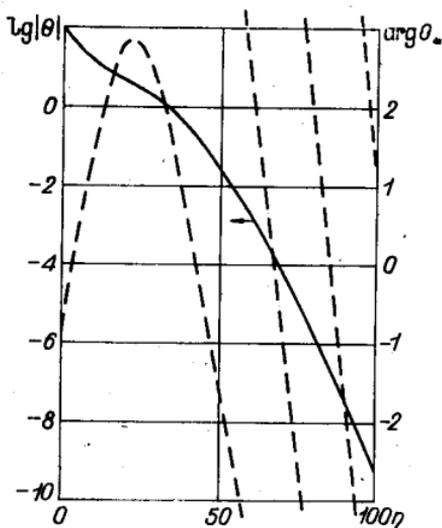


Рис. 105.

(12), наличие правой части приводит к экспоненциальному росту  $\omega(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \infty$ . Так же ведет себя и  $u(\eta)$  в силу уравнения неразрывности (13). Иллюстрация сказанному — график энергии пульсационного движения (рис. 106), рассчитанный по формуле

$$E = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 = |u|^2 + |v|^2 + |\omega|^2$$

для параметров  $\alpha = 0,0021$ ;  $\beta = 0,00013$ ;  $X = 36$ . В пристенной области энергия достигает максимума, но в дальнейшем, пройдя минимальную точку, начинает экспоненциально расти. На том же рисунке показана зависимость производной от рейнгольдсовых напряжений  $\tau'(\eta)$ . Несмотря на экспоненциальный рост энергии, эта величина быстро затухает с увеличением  $\eta$ , что легко понять, поскольку

$$\tau' = 1/\alpha \cdot [(v_i \theta_r - v_r \theta_i) + \beta (v_i \omega_r - v_r \omega_i)'] \quad (18)$$

Первое выражение в круглых скобках стремится к нулю вследствие сверхэкспоненциального затухания  $\theta$ , а второе становится нулем, так как в силу асимптотических

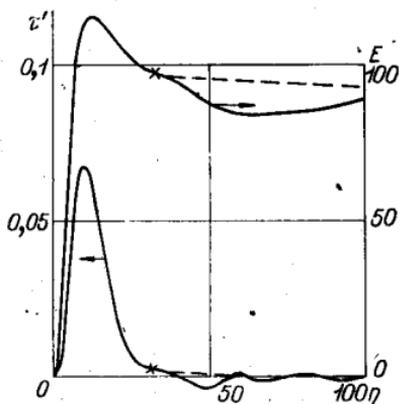


Рис. 106.

компоненты  $\omega$ , то хотя граничные условия (15) выделяют затухающее решение для однородной части

свойств  $v(\eta)$  и  $\omega(\eta)$  будут вещественными функциями при соответствующем выборе фазы.

Осциллирующий характер  $\tau'(\eta)$  следует из асимптотического представления (17). Заметим, что нули  $\tau'(\eta)$  будут отвечать точкам перегиба нового профиля скорости  $U_1(\eta)$ , поскольку в силу последнего уравнения (3)

$$U' = 1 - \tau, \quad (19)$$

т. е.  $\tau' = -U''$ . Интересно то обстоятельство, что параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $X$  можно подобрать так, чтобы функция  $\tau'(\eta)$  не имела нулей (кроме  $\eta=0$ ). На рис. 107 показана область (внутри кривой 1) значений параметров, при которых величина  $\tau'$  не обращается в нуль. В переменных  $\beta_1 = \alpha$ ;  $X_1 = X(10^{-4}\alpha)^{1/2}$  при малых  $\beta$  ( $\leq 10^{-3}$ ) эта область практически не зависит от  $\beta$ . Кривая 1 отвечает появлению первого нуля  $\tau'(\eta)$ , цифры соответствуют значениям  $\eta$ , при которых это происходит, кривые 2 и 3 отвечают появлению следующих нулей при меньших значениях  $\eta$ .

Решающую роль в наличии или отсутствии нулей у  $\tau'(\eta)$ , т. е. точек перегиба в профиле скорости, играет трехмерность колебаний. Обратимся к формуле (18). Вследствие асимптотических свойств функций  $\theta$  и  $v$  первое выражение в круглых скобках всегда носит осциллирующий характер и имеет в силу (17) счетное количество нулей. Но при подходящем выборе  $\beta$  эти осцилляции могут быть в какой-то степени скомпенсированы

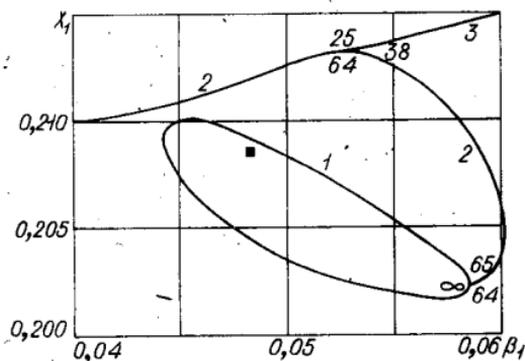


Рис. 107.

выражением во второй скобке. Сказанное иллюстрирует рис. 108, где для значений параметров, соответствующих квадратной точке на рис. 107, и для  $\beta = 0,0136$  нанесены зависимости  $\tau'(\eta)$  — сплошной кривой и  $1/\alpha \cdot (v, \theta_r - v, \theta_i)$  — пунктирной линией. Нормировка выбрана произвольно, но в правой части графика масштаб увеличен в 100 раз. Пунктирная линия имеет на представленном интервале шесть нулей, а  $\tau'(\eta)$  вообще не имеет нулей, хотя и носит осциллирующий характер.

Из топологических соображений нули у функции  $\tau'(\eta)$  могут появляться парами, поэтому линии 1—3 на рис. 107 отвечают кратным нулям. На кривой 1 существует точка, для которой кратный нуль  $\tau'$  совпадает с минимумом  $E(\eta)$ .

Как было показано выше, экспоненциальный рост энергии после точки минимума и осциллирующий характер  $\tau'$  — следствие линеаризации уравнений. Поскольку из физических соображений ясно, что энергия пульсаций должна стремиться к определенному конечному пределу  $\sim v_*^2$ , а в профиле скорости не должно быть точек перегиба, то ясно, что положение минимума  $E(\eta)$  или первого нуля  $\tau'(\eta)$  дает оценку сверху для величины интервала  $0 < \eta < R$ , где линейное приближение может считаться пригодным. Таким образом, верхнюю оценку для вязкой линейной зоны дают условия

$$\tau' = \tau'' = E = 0 \text{ при } \eta = R. \quad (20)$$

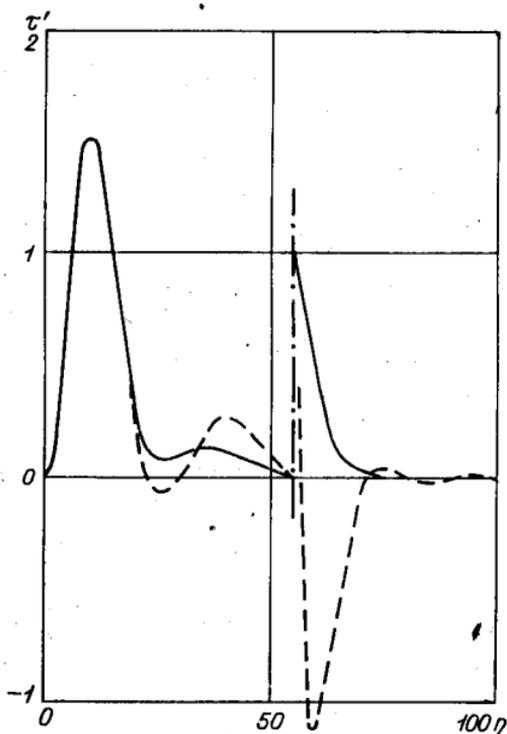


Рис. 108.

В работе [72] были исследованы решения, отвечающие требованиям (20). В пристенной зоне совпадение эксперимента и теории удовлетворительное. Но более чем экспоненциальное затухание  $\tau'(\eta)$  приводит к тому, что профиль скорости на границе вязкой зоны имеет максимум, а турбулентное трение  $\tau$  слишком быстро выходит на асимптотическое значение, равное единице. Эти недостатки обусловлены плохим сопряжением решения в вязкой зоне с асимптотическими закономерностями во внешней области. Необходимость такого сопряжения вытекает из принципа максимальной устойчивости.

Рассмотрим асимптотические закономерности турбулентности вдали от стенки, сопряжение которых с решением в вязкой зоне будет отражать влияние течения в ядре потока. Такая постановка уменьшает погрешность, вносимую модельным анализом, который, как было показано выше, непригоден для ядра течения.

Асимптотические закономерности следуют из предположения об отсутствии влияния вязкости вдали от стенки на усреднение и крупномасштабные пульсационные характеристики. Это требование весьма существенно, так как не только исключает тривиальное ламинарное решение с нулевыми пульсациями и линейным профилем средней скорости, но и позволяет эффективно использовать соображения теорий размерности. Поскольку в этих условиях единственными определяющими параметрами являются динамическая скорость  $v_*$  и расстояние от стенки  $y$ , то  $dU/dy \sim v_*/y$ , а энергия пульсаций  $E \sim v_*^2$ . Отсюда следует логарифмическое распределение для профиля скорости

$$U = 1/\kappa \cdot \ln \eta + C, \quad (21)$$

где  $1/\kappa$  — коэффициент пропорциональности. По уравнению Рейнольдса (19) получим

$$\tau = 1 - 1/(\kappa \eta). \quad (22)$$

Полное напряжение трения постоянно во всем потоке и равно единице при принятой нормировке. Соотношение (22) отражает тот факт, что турбулентные напряжения

вдали от стенки стремятся к полному. Опытные данные (см., например, [511]) свидетельствуют о том, что отношение  $\tau/E$  вне вязкой зоны величина практически постоянная (и равная 0,15). Следовательно, по аналогии с  $\tau$  асимптотическое соотношение можно выписать и для средней энергии пульсаций

$$E = E_{\infty} [1 + 1/(\kappa_1 \eta)]. \quad (23)$$

Условия (22), (23) содержат пока неизвестные константы  $\kappa$ ,  $\kappa_1$ ,  $E_{\infty}$ . Константы можно исключить, записав эти условия в дифференциальной форме

$$(\eta \tau)' = 1; (\eta E)'' = 0. \quad (24)$$

Первое из условий (24) фактически является другой формой нормировочного требования  $\tau(\infty) = 1$ . Второе условие позволяет определить точку сопряжения внутренней вязкой задачи с асимптотическими закономерностями (22), (23). Эта точка отмечена крестом на рис. 106. Введем функцию  $f_E \equiv \eta E'' + 2E'$ . Легко убедиться в том, что между экстремумами  $E(\eta)$  должен лежать, по крайней мере, один нуль  $f_E$ . Точкой сопряжения должен служить такой нуль  $f_E$ , который лежит за максимумом  $E$ , но до минимальной точки. За точкой сопряжения  $E(\eta)$  должна быть продолжена асимптотической зависимостью (23), как показано на рис. 106. Отметим, что через точку сопряжения энергия и ее первая производная продолжают непрерывно, в то время как вторая уже терпит разрыв.

В точке сопряжения  $\eta = R$  функция  $\tau'(\eta)$  и, следовательно, кривизна профиля  $U''(\eta)$  терпит разрыв. В главе I было показано, что наличие особенностей в профиле скорости приводит к неустойчивости при больших числах Рейнольдса (в данном случае число Рейнольдса бесконечно). Поэтому в соответствии с принципом максимальной устойчивости потребуем, чтобы сопряжение по профилю скорости осуществлялось максимально гладко. Построим функцию  $f_{\tau} \equiv \eta \tau'' + 2\tau'$ . Подбирая параметры  $\alpha$ ,  $X$ ,  $\beta$ , можно добиться, чтобы в точке

сопряжения  $\eta=R$  функция  $f_\tau$  имела нуль второго порядка:

$$\eta\tau''+2\tau'=0; \quad \eta\tau'''+3\tau''=0. \quad (25)$$

Условия (25) определяют два параметра, например  $\alpha$  и  $X$ , и обеспечивают непрерывность профиля скорости, вплоть до третьей производной включительно. Расчеты показали, что большей гладкости сопряжения добиться нельзя. Таким образом, один из параметров, например  $\beta$ , пока не определен. Семейство профилей скорости, отвечающее различным значениям  $\beta$ , показано на рис. 109. Кривые 0—4 соответствуют значениям  $\beta = 0,000011; 0,00013; 0,00015; 0,0002$ . При  $\beta \rightarrow 0$  решение вырождается в тривиальное, точка сопряжения  $R$  (отмечена на рис. 109 крестиком) уходит на бесконечность, а профиль совпадает с линейным  $U=\eta$ . С ростом  $\beta$  кривизна профиля в точке сопряжения сначала возрастает, но с некоторого  $\beta$  начинает убывать, так как точка перегиба на аналитическом продолжении  $U$  с уменьшением масштаба пульсаций приближается к точке  $\eta=R$ , стремясь попасть внутрь интервала  $0 < \eta < R$ .

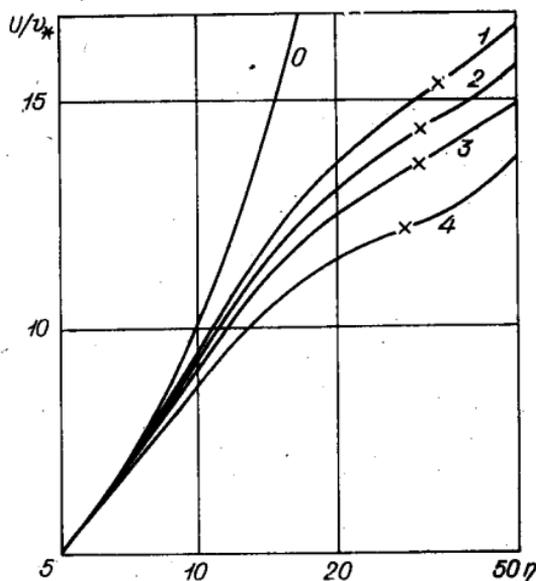


Рис. 109.

Поскольку наличие точки перегиба на профиле скорости — признак его неустойчивости, то, действуя в духе принципа максимальной устойчивости, естественно выбрать такое значение  $\beta$ , которое обеспечивает максимум  $|U''(R)|$  (рис. 110). Последнее условие замыкает задачу и позволяет единственным образом определить все параметры и характеристики течения в вязкой зоне.

Интегрирование системы (10) — (15) можно проводить поэтапно, решая последовательно две задачи Коши и одну краевую для уравнений второго порядка. Сначала интегрируется уравнение (10). Как уже упоминалось, его решение может быть выписано аналитически посредством функций Эйри от комплексного аргумента. Однако, помогая выявить некоторые общие свойства решения, это не облегчает расчетов. Поэтому интегрирование  $\theta(\eta)$  проводилось численно. Выбирался достаточно большой интервал  $0 < \eta < \eta_k$ . Поскольку искалось затухающее на бесконечности решение (10), то интегрирование проводилось методом Рунге — Кутта от  $\eta_k$  к стенке, в сторону нарастания функции  $\theta(\eta)$  (см. рис. 105), что обеспечивало численную устойчивость по отношению к погрешностям округления. В точке  $\eta = \eta_k$  задавались  $\theta(\eta_k) = 0$ ;  $\theta'(\eta_k) = \varepsilon$ . Последнее условие служило промежуточной нормировкой. Как правило, выбиралось  $\eta_k = 100$ . Контрольный расчет с  $\eta_k = 200$  показал, что с точностью до нормировки решения в интересующем нас диапазоне  $0 < \eta < 50$  совпадали с четырьмя значащими цифрами. Шаг интегрирования выбирался 0,5. Контрольные расчеты с шагом 0,25 свидетельствовали о независимости результатов от величины шага.

Далее методом Рунге — Кутта интегрировалось уравнение (11). Задача Коши определялась условиями на стенке  $v = v' = 0$ . Интегрирование опять проходило в сторону увеличения  $v'(\eta)$  от

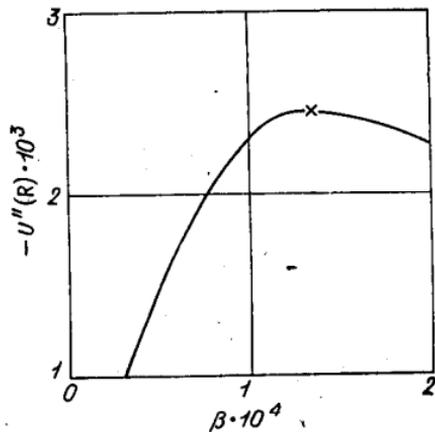


Рис. 110.

$\eta=0$  до  $\eta=\eta_k$ . К этому месту функция  $v(\eta)$  с высокой точностью следовала асимптотической формуле  $v(\eta) \sim \exp(k\eta)$ .

Следующий этап состоял в решении краевой задачи для  $w(\eta)$  — (12) с граничными условиями (14), (15). Запись граничного условия в форме (15) для  $w$  может показаться странной, поскольку при  $\eta \rightarrow \infty$  первый член в скобке становится бесконечно малым по сравнению со вторым. Однако более детальный анализ показывает, что это случается лишь при весьма больших  $\eta$ . В силу асимптотических свойств  $v(\eta)$  условие (15) можно записать в форме  $w = \beta/k^2 \cdot [1/(\eta-x) - k]v$  при  $\eta \rightarrow \infty$ . Поскольку величина  $k$  для интересующих нас случаев весьма мала ( $k \sim 2 \div 5 \cdot 10^{-3}$ ), то члены в квадратных скобках становятся равными лишь при  $\eta$  порядка нескольких сотен. Использование граничного условия в форме (15) способствует установлению асимптотического режима при гораздо меньших значениях  $\eta$ . Так, использование  $\eta_k = 100$  и  $\eta_k = 200$  не приводит к различию в результатах по  $w$  с точностью до трех значащих цифр.

Заключительная стадия интегрирования системы — вычисление  $u$  по формуле (13),  $\tau$  по (16) и  $E$ . Из второго условия (24) определяется точка  $\eta = R$ , решение перенормируется в соответствии с первым условием (24).

Такой расчет проводился для каждого набора значений  $\alpha$ ,  $X$ ,  $\beta$ . Затем при фиксированном  $\beta$  параметры  $\alpha$  и  $X$  выбираются так, чтобы удовлетворить требования (25). Для этого при определенных  $\beta$  была снята подробная сетка значений функций  $(\eta\tau)''$  и  $(\eta\tau)'''$ , а при других  $\beta$  нули этих функций рассчитывались по непрерывности методом двумерных секущих. Самой внешней процедурой было отыскание минимума  $U''_{\eta=R}(\beta)$  в однопараметрическом семействе.

Новый профиль скорости рассчитывался интегрированием (19) с начальным условием  $U(0) = 0$ .

Решению задачи отвечают следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,002125; \beta = 0,000134; X = 35,8; \\ R &= 31,9; \omega = \alpha X = 0,076. \end{aligned} \quad (26)$$

Вычисляя константы в зависимостях (21)—(23) по формулам

$$\kappa = 1/R \cdot [1 - \tau(R)]; \quad \kappa_1 = -[E(R) + RE'(R)]/[R^2 E'(R)]; \quad (27)$$

$$E_\infty = RE(R)/(R + 1/\kappa_1); \quad C = U(R) - 1/\kappa \cdot \ln R,$$

получаем значения

$$\kappa = 0,405; \quad C = 5,65; \quad \kappa_1 = 0,229; \quad E_\infty = 87,7. \quad (28)$$

На рис. 111 кривой 1 изображен рассчитанный профиль скорости  $U(\eta)$ . Точка сопряжения помечена крестиком. Пунктирной линией 2 нанесено аналитическое продолжение профиля скорости за точку сопряжения. Кривая 3 отвечает линейному закону  $U = \eta$ , а прямая 4 — логарифмическому закону с найденными значениями  $\kappa$  и  $C$ . Штриховкой обозначена область разброса опытных данных [432, 433]. Точками нанесены данные Хабахпашевой и ее сотрудников [226, 227].

Сопоставление показывает, что теоретический профиль скорости и константы  $\kappa$  и  $C$  находятся в хорошем

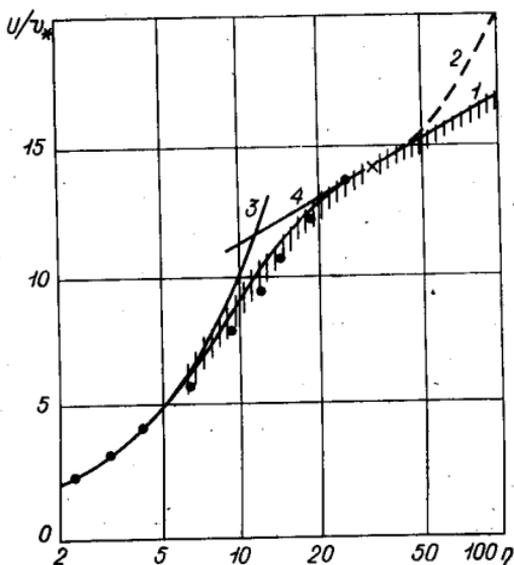


Рис. 111.

согласии с опытными данными. На рис. 112 кривыми 1—3 нанесены расчетные значения  $1/3 |u|$ ,  $|v|$  и  $|w|$  соответственно. Пунктирные линии отвечают данным Лауфера, а точки — Хабахпашевой (I —  $|u|$ ; II —  $|v|$ ; III —  $|w|$ ). Фазы компонент скорости в зависимости от  $\eta$  показаны на рис. 113. Постоянный фазовый множитель выбран так, чтобы  $\arg v \rightarrow 9$  при  $\eta \rightarrow \infty$ . Из рис. 113 видно, что в невязкой области фазы  $u$  и  $v$  сдвинуты на  $\pi/2$ , это связано с неучетом нелинейных эффектов. Там же нанесена фаза пульсаций давления. Она и модуль  $|q|$

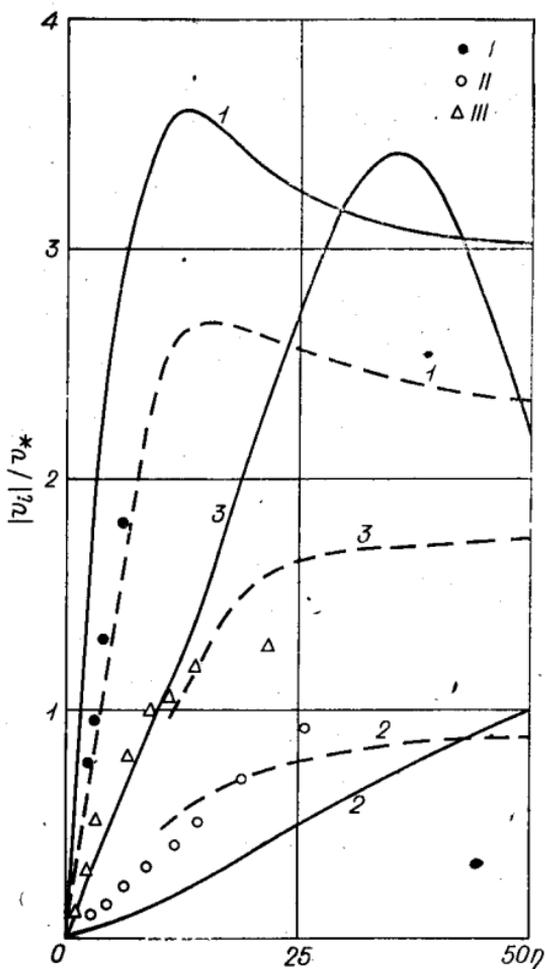


Рис. 112.

практически постоянны во всей рассмотренной области:  $|q'/q| \sim 10^{-5}$ , что согласуется с теоретическими и экспериментальными данными [295].

Из рис. 112 видно, что согласие по интенсивности пульсаций носит лишь качественный характер. Интенсивности  $|v|$  несколько занижены, а  $|u|$  значительно завышены (более чем в 3 раза). Соответственно и значения пульсационной энергии  $E_{\infty}$  на порядок превосходит экспериментальные данные. Эти расхождения объясняются относительно слабой корреляцией компонент  $u$  и  $v$  пульсационной скорости и обусловлены

недостаточностью моногармонической линейной модели для описания тонких свойств турбулентности. Тем не менее зависимость  $E(\eta)$  описывается качественно верно, она имеет максимум при  $\eta=14$ , а константа  $\chi_1$  в асимптотическом законе (23) с хорошей точностью совпадает с опытным значением после соответствующей обработки данных Лауфера.

Согласно вычислениям, первые члены разложения напряжений Рейнольдса в ряд Тейлора у стенки таковы:

$$\tau = 0,23 \cdot 10^{-5} \eta^3 + 18 \cdot 10^{-5} \eta^4 + \dots$$

Первые два члена аппроксимируют  $\tau$  с точностью до 10% при  $\eta \leq 2$ . При значениях  $\eta$  порядка единицы второй член существенно превосходит первый, они становятся одного порядка лишь при  $\eta \sim 10^{-2}$ . Таким образом, в этой модели хотя и присутствует член с  $\eta^3$ , но его влияние весьма мало. Это связано с малостью величины  $\beta$ .

Заметим, что продольный масштаб и частота  $\omega$ , рассчитанные здесь, согласуются по порядку величины с

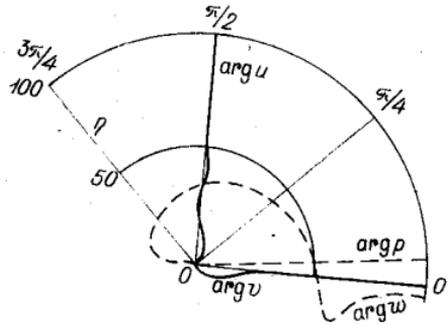


Рис. 113.

опытными данными. В то же время визуальные наблюдения свидетельствуют, что ширина вихрей на порядок меньше длины, а расчетные величины находятся в обратном отношении  $\alpha/\beta \approx 16$ . Это, однако, можно объяснить. При визуальных наблюдениях выделяется наиболее мелкая структура вихревых образований. Спектральный же анализ пульсаций давления [295] свидетельствует о том, что наибольший вклад дают колебания с  $\alpha \gg \beta$  и  $\beta \gg \alpha$ . Именно последние наблюдаются визуально, но наши расчеты показали, что при той же амплитуде колебания с  $\alpha \gg \beta$  дают гораздо большие по величине рейнольдсовы напряжения и, следовательно, играют основную роль в формировании профиля скорости.

Таким образом, мы видим, что уже в рамках очень упрощенной модели пульсационного движения получается теоретическое решение, которое вполне удовлетворительно согласуется с опытными данными.

Плодотворность идеи гладкого сопряжения внутреннего и асимптотического решений выражается и в том удивительном факте, что на ее основе можно рассчитать некоторые характеристики турбулентности, в частности константу Прандтля — Кармана  $\kappa$ , так сказать, «на пальцах», не прибегая к интегрированию сложных систем уравнений. Для этого рассмотрим турбулентное течение вблизи шероховатой стенки.

Влиянию шероховатости на динамику и характеристики турбулентности посвящено много работ, начиная с классических опытов Никурадзе [470]. Обзор этих работ не входит в нашу задачу. Упомянем лишь детальную работу Грасса [353] и обширные исследования, проведенные группой Миллионщикова [160, 161]. Нас, прежде всего, будет интересовать влияние шероховатости на профиль скорости в универсальных координатах. Как известно, при учете шероховатости возникает ряд проблем. Первая из них связана с определением «эквивалентной стенки», т. е. плоскости, на которой средняя скорость равна нулю. Вторая заключается в выборе критериев шероховатости, поскольку выяснилось, что важна не только высота шероховатости, но и другие параметры, определяющие геометрию выступов и впадин.

Мы рассмотрим случай развитой шероховатости, подразумевая под этим, что расстояние между выступами порядка вязкого масштаба  $\nu/v_*$ , а высота их много больше этого масштаба. В этом случае высота шероховатости перестает быть определяющим параметром, так как в узких зазорах между выступами возникают застойные зоны, или области замкнутой циркуляции, куда не проникает среднее течение. Пространственная структура выступов (рис. 114) предполагается такой, чтобы на расстоянии нескольких вязких масштабов течение можно было рассматривать как однородное по пространственным координатам (кроме поперечной).

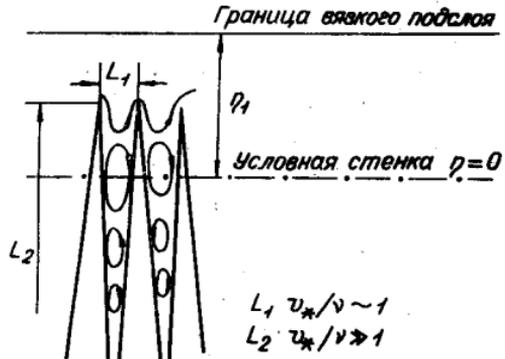


Рис. 114.

Профили скорости в универсальных координатах для различных степеней шероховатости показаны на рис. 115. Вдали от стенки выполняется логарифмический закон (21), причем, как следует из экспериментальных данных, величина  $\kappa$  одна и та же при различных уровнях шероховатости. Это понятно, ибо  $\kappa$  — коэффициент асимптотического разложения для рейнольдсовых напряжений  $\tau = 1 - 1/(\kappa\eta)$ . Поскольку турбулентное движение обладает сильными свойствами перемешивания, то с удалением от стенки оно «забывает» особенности пристенной структуры, что и объясняет независимость коэффициента  $\kappa$  в асимптотическом выражении для  $\tau$  от характера шероховатости. Величина  $C$ , напротив, зависит от особенностей течения в вязкой области [163, 353]. Она определяется размером буферной зоны между вязким подслоем и логарифмическим участком. Наличие выступов, способствующих турбулизации течения, приводит к уменьшению буферной зоны, и в пределе развитой шероховатости константа  $C$  стремится к нулю. Профиль  $l$

на рис. 115 отвечает гладкой стенке; 4 — линейному закону  $U = \eta$ ; 3 — развитой шероховатости, а 2 — промежуточному случаю [353]. Часто профили при очень большой шероховатости имеют вид 5. Однако при подходящем выборе эффективного диаметра трубы, т. е. положения эквивалентной стенки, профиль скорости можно привести к форме 3. Полагая величину  $C$  равной нулю, получим для внешней области

$$U = 1/\kappa \cdot \ln \eta. \quad (29)$$

Внутри вязкого подслоя в силу выбранных масштабов

$$U = \eta. \quad (30)$$

Потребуем гладкого сопряжения зависимости (29) и (30). Пусть в некоторой точке  $\eta_1$  совпадают скорости и величины производных

$$\eta_1 = 1/\kappa \cdot \ln \eta_1; \quad \kappa \eta_1 = 1.$$

Отсюда следует

$$\eta_1 = e; \quad \kappa = 1/e = 0,368. \quad (31)$$

Попробуем уточнить «толщину» вязкого подслоя  $\eta_1$  и значение  $\kappa$ , учтя следующие члены разложения  $U(\eta)$  в ряд Тейлора:

$$U = \eta - a\eta^n. \quad (32)$$

Из условий непрерывности вплоть до второй производной скорости на границе  $\eta_1$  сопряжение законов (29) и (32) дает:

$$\eta_1 = \exp(1 + 1/n); \quad \kappa = n/[(n-1)\eta_1]; \quad a = n^{-2}\eta_1^{1-n}. \quad (33)$$

Если принять, как в случае гладкой стенки,  $n=4$ , то получим из (33)  $\eta_1 = 3,49$ ,  $\kappa = 0,382$ ,  $a = 0,00147$ . Но в случае шероховатой стенки можно ожидать, что сте-

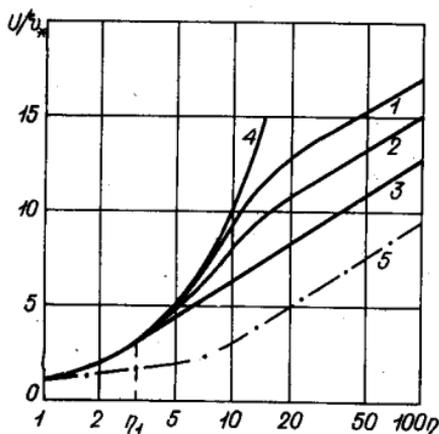


Рис. 115.

пень  $n$  будет меньше четырех. Из упрощенной модели (см. рис. 114) следует, что на условной стенке  $\eta=0$  обращается в нуль и пульсационная компонента  $u_x$ . Мгновенная величина  $u_x$ , вообще говоря, отлична от нуля, но после усреднения по продольной координате вследствие симметрии (в среднем) замкнутых циркуляционных зон рейнольдсовы напряжения будут иметь нуль второго порядка по  $\eta$ . Полагая из этих соображений, что  $n=3$ , в (33) получим

$$\eta_1=3,79; \kappa=0,396; a=0,00775. \quad (34)$$

Легко видеть, что использованная здесь методика сопряжения ограничена. В частности, на этом пути не удастся рассчитать константу  $C$  при использовании во внешней зоне закона (21). Для этого требуется более детальный анализ пульсационного движения в буферной зоне, что и проделано выше. Но поскольку по приведенным соображениям величина  $\kappa$  не зависит от  $C$ , вычисления  $\kappa$ , проделанные при  $C=0$ , имеют общее значение. Рассчитанное в рамках этой элементарной модели значение  $\kappa$  (34) хорошо согласуется с предыдущими результатами [см. (28) и (4.9)]. Таким образом, принцип максимальной устойчивости, несмотря на различие конкретных форм его реализаций, неизменно дает совпадающие между собой и близкие к опытным данным значения характеристик турбулентности. Каждая из моделей в меру своей идеализации и сделанных упрощающих приближений позволяет рассчитать лишь определенные усредненные характеристики турбулентности. Последняя самая простая модель позволяет лишь рассчитать константу Прандтля — Кармана. Квазиламинарная реализация принципа максимальной устойчивости дала возможность рассчитать более тонкие структурные особенности усредненного профиля скорости. Наконец, моногармоническая модель пристенной турбулентности позволила получить определенную информацию о структуре пульсаций и распределении турбулентной энергии. Но все эти модели, имея в основе принцип максимальной устойчивости, дают там, где они перекрываются, близкие результаты.

Сказанное свидетельствует, на наш взгляд, о плодотворности применения принципа максимальной устойчивости для теоретического расчета основных характеристик турбулентного течения без использования каких-либо эмпирических констант.

\* \* \*

Данная глава в настоящей работе имеет особый характер, поскольку она посвящена изучению свойств развитой турбулентности, в то время как в других главах анализ проводился в рамках известных точных уравнений или их проективных приближений.

В теории турбулентности центральной является именно проблема получения замкнутых на определенном уровне уравнений для моментов. Здесь проблема замыкания в отличие от других подходов решается на основе формулировки вариационного принципа — принципа максимальной устойчивости усредненных турбулентных течений. При этом в конкретных расчетах использованы свойства задачи гидродинамической устойчивости ламинарных течений, изученные в предыдущих главах.

Другая отличительная черта предпринятого анализа — попытка автономно рассмотреть крупномасштабную, генерационную часть турбулентного движения. Так, при квазиламинарном использовании принципа максимальной устойчивости пульсационной структурой турбулентного движения вообще пренебрегали, а в моногармоническом приближении аппроксимировалась именно крупномасштабная часть спектра, играющая основную роль в формировании среднего профиля скорости. Влияние остальной части турбулентного спектра выражалось лишь через вариационные требования, условия сопряжения с асимптотическими закономерностями. Конечно, такой подход не позволяет описать тонкую структуру и спектральные свойства турбулентных пульсаций, но, как мы видели, дает возможность рассчитать ряд крупномасштабных усредненных характеристик турбулентности. Он наиболее плодотворно проявляет себя, когда эффективные числа Рейнольдса не слишком велики. Ведь даже в обсуждаемой здесь задаче Прандтля,

отвечающей бесконечным числам Рейнольдса, фактически определяющую роль играет пристенная вязкая зона, где  $u_y/\nu \leq 100$ . Одной из причин, обусловивших определенный успех такого приближенного анализа в вычислении основных характеристик турбулентности, является, на наш взгляд, то ведущее значение, которое имеет генерационный интервал в процессах переноса импульса, энергии и пассивной примеси и в целом в формировании глобальных свойств турбулентного режима, а также относительная автономность генерационной части спектра, допускающая возможность ее самостоятельного анализа.

Характерная и весьма важная черта предпринятого анализа — его эскалаторные свойства. Уже в рамках самой элементарной модели удастся рассчитать такую важную характеристику турбулентности, как константу Прандтля — Кармана. Усложняя модели, мы получаем более богатую информацию о турбулентном режиме, которая повторяет и расширяет предыдущие результаты.

Конечно, полученные результаты не составляют сколько-нибудь завершенной теории турбулентности, это лишь попытка введения в такую теорию. По-видимому, наиболее целесообразным следующим этапом является более детальный учет структуры импульсационного движения на основе включения в модель резонансного трехволнового взаимодействия, а также использование развитой методики для решения таких проблем, как объяснение эффекта Томса, определение турбулентного числа Прандтля и др. Первые шаги в этих направлениях уже предпринимаются.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Абрамов А. А.** О переносе граничных условий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки).— «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1961, т. 1, № 3, с. 542—545.
2. **Абрамович Г. Н.** Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960, 715 с.
3. **Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н.** Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтономельности. М., «Машиностроение», 1975, 94 с.
4. **Авдуевский В. С., Данилов Ю. И., Кошкин В. К.** Основы теплопередачи в авиационной и ракетной технике. М., 1960, 382 с.
5. **Акатнов Н. И.** О применимости энергетического уравнения турбулентности в теории струйных течений.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1973, № 2, с. 75—81.
6. **Андрейчиков И. П.** Расчет вторичного течения между вращающимися цилиндрами.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1975, № 2, с. 150—152.
7. **Андрейчиков И. П., Кузьменко Э. А.** Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля — Куэтта в плоском канале.— В кн.: Труды 4-го Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1973, с. 88—94.
8. **Андрейчиков И. П., Юдович В. И.** Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 202, № 4, с. 791—794.
9. **Арнольд В. И.** Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости.— «Докл. АН СССР», 1965, т. 162, № 5, с. 975—978.
10. **Архипов В. Н.** Образование колебаний в следе за телом.— «Докл. АН СССР», 1958, т. 123, № 4, с. 620—622.
11. **Бабский В. Г., Скловская И. Л., Скловский Ю. Б.** О возникновении вихрей Тейлора между вращающимися эксцентрическими цилиндрами.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1973, № 3, с. 101—106.
12. **Басин А. М., Короткин А. И., Козлов Л. Ф.** Управление пограничным слоем судна. Л., «Судостроение», 1968.
13. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. Ч. 1. М., «Наука», 1975. 631 с.
14. **Белоцерковский С. М., Ништ М. И.** К расчету срывного нестационарного обтекания тонкого профиля.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1972, № 3, с. 177—182; РЖМех, 1972, 9Б576.
15. **Бетчов Р., Криминале В.** Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971. 350 с.

16. **Бирих Р. В.** О спектре малых возмущений плоскопараллельного течения Куэтта.— «Прикл. матем. и мех.», 1965, т. 29, № 4, с. 798—800.
17. **Бирих Р. В.** О малых возмущениях плоскопараллельного течения с кубическим профилем скорости.— «Прикл. матем. и мех.», 1966, т. 30, № 2, с. 356—361.
18. **Бирих Р. В.** Замечание к работам Р. В. Бириха «О спектре малых возмущений плоскопараллельного течения Куэтта» и «О малых возмущениях плоскопараллельного течения с кубическим профилем скорости».— «Прикл. матем. и мех.», 1966, т. 30, № 6, с. 1147.
19. **Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Б. М.** О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса.— «Прикл. матем. и мех.», 1965, т. 29, № 1, с. 88—98.
20. **Брановер Г. Г., Цинобер А. Б.** Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М., «Наука», 1970. 379 с.
21. **Брушлинская Н. Н.** О предельных циклах уравнений движения твердого тела и галеркинских уравнений гидродинамики.— «Докл. АН СССР», 1964, т. 157, № 5, с. 1017—1020.
22. **Брушлинская Н. Н.** О поведении решений уравнений гидродинамики при переходе числа Рейнольдса через критическое значение.— «Докл. АН СССР», 1965, т. 162, № 4, с. 731—734.
23. **Брэдшоу П.** Введение в турбулентность и ее измерение. М., «Мир», 1974, 278 с.
24. **Булеев Н. И.** Дальнейшее развитие пространственной модели турбулентного обмена в потоках несжимаемой жидкости.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Новосибирск, 1975, с. 51—79.
25. **Бэтчелор Дж.** Теория однородной турбулентности. М., ИЛ, 1962.
26. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968. 464 с.; РЖМат, 1969, 8Б277К.
27. **Варапаев В. Н., Штемлер Ю. И., Ягодкин В. И.** О влиянии непараллельности на устойчивость струи Бикли—Шлихтинга.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1973, № 6, с. 139—141.
28. **Васильев О. Ф., Будунов Н. Ф.** Приближенная модель отрывного турбулентного течения при внезапном расширении канала.— «Изв. Сиб. отд. АН СССР. Серия техн. наук», 1973, вып. 2, с. 9—12.
29. **Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А.** Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970. 672 с.
30. **Велихов Е. П.** Устойчивость плоского Пуазейлева течения идеальной проводящей жидкости в продольном магнитном поле.— «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1959, т. 36, № 4, с. 1192—1202.
31. **Викторов Е. Д.** Устойчивость плоского течения Пуазейля около деформируемых стенок.— «Труды Ленинградского политех. ин-та», 1969, № 307, с. 5—10.
32. **Вильгельми Т. А., Гольдштик М. А., Сапожников В. А.** Устойчивость течения в круглой трубе.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1973, № 1, с. 20—24.

33. Вильгельми Т. А., Сапожников В. А. Об устойчивости течения в кольцевом канале.— «Численные методы механики сплошной среды», Новосибирск, 1971, т. 2, № 4, с. 31—39.
34. Вильгельми Т. А., Сапожников В. А. О влиянии параллельного магнитного поля на устойчивость течения в кольцевом канале.— В кн.: Вопросы гидродинамики и теплообмена. Новосибирск, 1972, с. 188—196.
35. Вильгельми Т. А., Штерн В. Н. Устойчивость спирального течения в кольцевом зазоре.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1974, № 3, с. 35—44.
36. Вишик М. Н., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— «Усп. матем. наук», 1957, т. 12, № 5, с. 3—122.
37. Власов Е. В., Гиневский А. С. Экспериментальное исследование влияния акустических возмущений на возникновение турбулентности в пограничном слое.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Ч. 2. Новосибирск, 1975, с. 232—242.
38. Выонг К. К., Зайцев А. А. К вопросу о развитии трехмерных возмущений в пограничном слое.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1974, № 1, с. 29—37.
39. Генин Л. Г., Краснощекова Т. Е., Манчха С. П., Свиридов В. Г. Баланс «энергии» температурных пульсаций при турбулентном течении ртути в трубе.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Ч. 2. Новосибирск, 1975, с. 178—185; «Теплофиз. высокие температур», 1975, т. 13, № 2, с. 354—360.
40. Герих В. В., Калугин В. Н. Численный анализ устойчивости ламинарного несжимаемого пограничного слоя вдоль упругой границы.— В кн.: Труды 4-го Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1973, с. 82—87.
41. Герценштейн С. Я. О трехмерных волнах в пограничном слое.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1968, № 4, с. 98—102.
42. Герценштейн С. Я. Об устойчивости нестационарного прямолинейного плоскопараллельного потока идеальной жидкости.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1969, № 2, с. 5—10.
43. Герценштейн С. Я. О сходимости метода Релея.— «Докл. АН СССР», 1969, т. 187, № 5, с. 1012—1015.
44. Герценштейн С. Я., Лезин Е. М., Шкадов В. Я. О нелинейном развитии и взаимодействии колебаний в плоском следе.— Труды 2-й Всесоюз. конф. «Современные проблемы тепловой конвекции». Пермь, 1975.
45. Герценштейн С. Я., Шмидт В. М. Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя.— «Докл. АН СССР», 1974, т. 219, № 4, с. 294—300; 1975, т. 225, № 1, с. 59—62.
46. Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М. О возмущениях конечной амплитуды в пограничном слое.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1976, № 1, с. 150—152.
47. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972. 392 с.

48. Гершуни Г. З. Исследование устойчивости стационарных конвективных движений. Автореф. докт. дис. М., 1975. (Ин-т прикладной математики АН СССР).
49. Гешев П. И. Характеристики коэффициентов турбулентного обмена в вязком подслое.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1974, № 2, с. 61—66.
50. Гешев П. И. Турбулентный тепло- и массоперенос при больших и малых числах Прандтля.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Ч. 2. Новосибирск, 1975, с. 183—193.
51. Гимранов Ф. М., Зиннатуллин Н. Х., Григорьев Л. Н. Устойчивость плеченого течения вязкой жидкости по коническому ротору.— «Труды Казанского хим.-технол. ин-та», 1974, вып. 53, с. 126—131.
52. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М., «Машиностроение», 1969, 400 с.; РЖМех, 1969, 9Б411К.
53. Гинзбург И. П. Теория сопротивления и теплопередачи. Л., Изд-во ЛГУ, 1970. 375 с.
54. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости, флуктуаций. М., «Мир», 1973. 280 с.
55. Глушко Г. С. Переход к турбулентному режиму течения в пограничном слое плоской пластины при различных масштабах турбулентности набегающего потока.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1972, № 3, с. 68—70.
56. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— «Усп. матем. наук», 1961, т. 16, № 3, с. 171—174.
57. Годунов С. К., Рябенкий В. С. Разностные схемы. М., 1973.
58. Голов В. К., Поляков Н. Ф., Тимофеев В. А. Исследование перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный при малых дозвуковых скоростях.— В кн.: «Аэрофизические исслед.», Ч. 2. Новосибирск, 1972, с. 126—127.
59. Гольдштик М. А. Одно парадоксальное решение уравнений Навье — Стокса.— «Прикл. матем. и мех.», 1960, т. 4, с. 619—621.
60. Гольдштик М. А. Принцип максимальной устойчивости осредненных турбулентных течений.— «Докл. АН СССР», 1968, т. 182, № 5, с. 1026—1028.
61. Гольдштик М. А., Кутателадзе С. С. Вычисленные константы пристенной турбулентности.— «Докл. АН СССР», 1969, т. 185, № 3, с. 535—537.
62. Гольдштик М. А., Лихачев О. А., Штерн В. Н. Принцип максимальной устойчивости в пристенной турбулентности.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Новосибирск, 1975, с. 23—33.
63. Гольдштик М. А., Правдина М. Х. О взаимодействии внешнего возмущения с турбулентным потоком.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1976, № 1, с. 61—65.
64. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии массовых сил.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1968, № 5, с. 42—46.
65. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость течения в кольцевом канале.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1971, № 4, с. 102—108.

66. Гольдштик М. А., Сапожников В. А., Штерн В. Н. Локальные свойства задачи гидродинамической устойчивости.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1970, № 2, с. 56—61.
67. Гольдштик М. А., Сапожников В. А., Штерн В. Н. Определение профиля скорости в вязком подслое на основе принципа максимальной устойчивости.— «Докл. АН СССР», 1970, т. 193, № 4, с. 784—787.
68. Гольдштик М. А., Сапожников В. А., Штерн В. Н. Проверка гипотезы Малкуса об устойчивости турбулентных потоков.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1970, № 5, с. 172—176.
69. Гольдштик М. А., Сапожников В. А., Штерн В. Н. Локальные свойства профиля скорости и гидродинамическая устойчивость.— «Гидромеханика», 1972, вып. 20, с. 39—43. (Респ. межвед. сб.).
70. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Определение закона турбулентного трения в ядре потока на основе принципа максимальной устойчивости.— «Докл. АН СССР», 1969, т. 188, № 4, с. 772—775.
71. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Модельные автоколебания и турбулентность.— В кн.: Проблемы теплофизики и физич. гидродинамики. Новосибирск, 1974, с. 17—25.
72. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Моногармоническая модель вязкого подслоя.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Новосибирск, 1975, с. 34—50.
73. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Моногармоническая теория пристенной турбулентности. Докл. на III Всесоюз. школе-семинаре по проблеме турбулентности. Новосибирск, 1975, 19 с. (Ин-т теплофизики СО АН СССР, Препринт 04-75).
74. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Приближенная теория пристенной турбулентности.— «Докл. АН СССР», 1976, т. 227, № 1, с. 67—70.
75. Грудцына Н. М., Заметалин В. В. Устойчивость ламинарных пограничных слоев с отсосом и вдувом.— В кн.: Аэрогазодинамика. Новосибирск, 1973, с. 74—77.
76. Гуваков А. М. Исследование пристенной турбулентности в канале электрохимическим методом. Дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. Новосибирск, 1971. (Ин-т теплофизики СО АН СССР).
77. Дикий Л. А. Устойчивость плоскопараллельных потоков идеальной жидкости.— «Докл. АН СССР», 1960, т. 135, № 5, с. 1068—1071.
78. Дикий Л. А. Об устойчивости плоскопараллельного течения Куэтта.— «Прикл. матем. и мех.», 1964, т. 28, № 2, с. 389—392.
79. Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа. М., 1974. 160 с.
80. Должанский Ф. В. Исследование механизма нелинейного взаимодействия в одной задаче о конвекции метода Галеркина.— «Труды 2-й Всесоюз. конф. «Современные проблемы тепловой конвекции». Пермь, 1975.
81. Дыбан Е. П., Эпик Э. Я. Микроструктура пограничных слоев и процессы переноса в них при повышенной турбулентности внешнего потока.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Ч. 2. Новосибирск, 1975, с. 30—42.

82. Желтухин Н. А. Детерминантный метод решения уравнения Орра — Зоммерфельда.— В кн.: Аэрогазодинамика. Новосибирск, 1973, с. 70—73.
83. Желтухин Н. А., Терехова Н. М. Напряжение Рейнольдса в плоскопараллельных течениях, возмущенных волнами Толлмина — Шлихтинга.— «Изв. Сиб. отд. АН СССР. Серия техн. наук», 1973, вып. 1, с. 33—39.
84. Жигулев В. Н. К вопросу о распространении возмущений в турбулентных потоках.— «Численные методы механики сплошной среды», Новосибирск, 1973, т. 4, № 2, с. 51—56.
85. Жигулев В. Н. Модели турбулентных движений (о развитии возмущений в турбулентных потоках).— «Численные методы механики сплошной среды». Новосибирск, 1973, т. 4, № 3, с. 76—89.
86. Жигулев В. Н., Сидоренко Н. В., Тумин А. М. К проблеме возникновения турбулентности.— «Численные методы механики сплошной среды», Новосибирск, 1975, 6, № 1, с. 30—41.
87. Жукаускас А., Шланчяускас А. Теплоотдача в турбулентном потоке жидкости. Вильнюс, «Минтис», 1973.
88. Захаров В. Е., Мананов С. В. К теории резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах.— «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1975, т. 69, № 5, с. 1654—1673.
89. Зельман М. Б. О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных потоках.— «Изв. Сиб. отд. АН СССР. Серия техн. наук», 1974, вып. 3, с. 16—21.
90. Зельман М. Б. О влиянии возмущения в набегающем потоке на устойчивость течения типа пограничного слоя.— «Изв. Сиб. отд. АН СССР. Серия техн. наук», 1976.
91. Зеньковская С. М. Об устойчивости одного периодического решения уравнений Навье — Стокса.— «Прикл. матем. и мех.», 1967, т. 31, № 1, с. 124—130.
92. Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М., «Наука», 1975. 256 с.
93. Кадер Б. А. Турбулентность в вязком подслое вблизи плоской стенки.— В кн.: Турбулентные течения. М., 1970, с. 69—73.
94. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. Нелинейные волны.— «Усп. физ. наук», 1971, т. 103, № 2, с. 193—232.
95. Калугин В. Н. Результаты численных расчетов нелинейной устойчивости течения Пуазейля с упругими границами.— В кн.: Труды 4-го Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1973, с. 219—223.
96. Калугин В. Н., Герих В. В. Управление течением в пограничном слое по принципу обратной связи. Ч. 1. Пассивные системы управления.— В кн.: Распределенное управление процессами в сплошной среде. Киев, «Наукова думка», 1972, с. 37—107.
97. Калугин В. Н., Чечко Г. А. Исследование вязкой неустойчивости несжимаемой плоской струи.— «Инж.-физ. ж.», 1974, т. 26, № 2, с. 305—308.
98. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962. 708 с.
99. Каулинг Т. Г. Магнитная гидродинамика. М., ИЛ, 1959. 132 с.
100. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Экспериментальное

- исследование влияния непараллельности течения в пограничном слое на его устойчивость.— В кн.: Газодинамика и физ. кинетика. Новосибирск, 1974.
101. **Кирдяшкин А. Г.** Структура тепловых гравитационных течений вблизи поверхности теплообмена. Автореф. докт. дис. Новосибирск, 1975. (Ин-т теплофизики СО АН СССР).
  102. **Кит Л. Г., Цинобер А. Б.** О возможности создания исследования двумерной турбулентности в сильном магнитном поле.— «Магнитная гидродинамика», 1971, № 3, с. 27—34.
  103. **Козлов Л. Ф.** Об учете начальной турбулентности при определении точки перехода методом малых колебаний.— «Гидромеханика», 1974, вып. 28, с. 78—81. (Респ. межвед. сб.).
  104. **Колесников Ю. Б., Цинобер А. Б.** Двумерное турбулентное течение за круглым цилиндром.— «Магнитная гидродинамика», 1972, № 3, с. 23—31.
  105. **Колесников Ю. Б., Цинобер А. Б.** Реализация и экспериментальное исследование двумерных турбулентных течений за решеткой и в канале.— В кн.: 7-е совещ. по магнитной гидродинамике. Т. 1. Рига, 1972, с. 24—27; РЖМех, 1972, 10Б54.
  106. **Колмогоров А. Н.** Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— «Докл. АН СССР», 1941, т. 30, № 4, с. 299—303.
  107. **Колмогоров А. Н.** Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости.— «Изв. АН СССР. Серия физич.», 1942, т. 6, № 1—2, с. 56—58.
  108. **Колобов Б. П., Слепцов А. Г.** Новый метод построения разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений и его применение к решению задачи гидродинамической устойчивости.— «Численные методы механики сплошной среды», Новосибирск, 1972, т. 3, № 1, с. 61—77.
  109. **Колобов Б. П., Слепцов А. Г.** Устойчивость двухслойных течений жидкости.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1974, № 5, с. 155—157.
  110. **Конт-Белло Ж.** Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., «Мир», 1968. 176 с.
  111. **Короткин А. И.** Устойчивость плоского течения Пуазейля при наличии упругих границ.— «Прикл. матем. и мех.», 1965, т. 29, № 6, с. 1122—1127.
  112. **Короткин А. И.** Устойчивость ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости с переменными физическими свойствами.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1966, № 4, с. 76—80.
  113. **Крылов А. Л.** Доказательство неустойчивости одного течения вязкой несжимаемой жидкости.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 153, № 4, с. 768—770.
  114. **Крылов А. Л.** Об устойчивости течения Пуазейля в плоском канале.— «Докл. АН СССР», 1964, т. 159, № 5, с. 978—981.
  115. **Крылов А. Л.** Об устойчивости течения Пуазейля в плоском канале.— «Прикл. матем. и мех.», 1966, т. 30, № 4, с. 679—687.
  116. **Крылов А. Л., Малыгина И. Д.** Решение задачи о собственных значениях для уравнения Орра — Зоммерфельда разностным ме-

- тодом (устойчивость течения Пуазейля в плоском канале).— «Вычислительные методы и программирование», 1968, вып. 11, с. 44—54.
117. Кузьмин Г. А. Спектр турбулентности в области больших волновых чисел.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1971, № 4, с. 63—71.
  118. Кузьмин Г. А., Паташинский А. З. Гипотеза подобия и гидродинамическое описание турбулентности.— «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 62, № 3, с. 1175—1184.
  119. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962. 246 с.
  120. Кутателадзе С. С. Проблема устойчивости в теории пристенной турбулентности.— В кн.: Проблемы тепло- и массопереноса. М., 1970, с. 107—114.
  121. Кутателадзе С. С. Консервативные свойства пристенной турбулентности.— «Теоретич. основы химич. технол.», 1971, 5, № 1, с. 3—12; РЖМех., 1971, 6Б880.
  122. Кутателадзе С. С. Пристенная турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1973. 227 с.
  123. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Новосибирск, 1960.
  124. Кутателадзе С. С., Миронов Б. П., Накоряков В. Е., Хабахпашева Е. М. Экспериментальное исследование пристенных турбулентных течений. Новосибирск, «Наука», 1975. 166 с.
  125. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Гуваков А. И. Спектральная плотность пульсаций трения в турбулентном пристенном течении.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 196; № 5, с. 1046—1048.
  126. Кутателадзе С. С. и др. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1964. 207 с.
  127. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970. 288 с.
  128. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., ОГИЗ—Гостехиздат, 1947. 928 с.
  129. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности.— «Докл. АН СССР», 1944, т. 44, № 4, с. 339—342.
  130. Ланс Дж. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., ИЛ, 1962.
  131. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М., «Наука», 1970. 343 с.
  132. Левин В. Б. К расчету основных характеристик турбулентных потоков с поперечным сдвигом.— «Теплофизика высоких температур», 1964, т. 2, № 4, с. 588—598.
  133. Левитан Ю. Л., Рождественский Б. Л. Спектральные характеристики разностных схем для расчета течения вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися цилиндрами. М., 1973, 26 с. (Ин-т прикладной математики АН СССР. Препринт № 29).
  134. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959. 699 с.
  135. Левченко В. Я., Володин А. Г., Гапонов С. А. Характеристики устойчивости пограничных слоев. Новосибирск, 1975, 313 с.

136. Лидский В. В., Садовничий В. А. Формулы следов в случае уравнения Орра — Зоммерфельда.— «Изв. АН СССР. Серия матем.», 1968, т. 32, № 3, с. 633—648.
137. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., ИЛ, 1958. 194 с.
138. Лисейкина Т. А. Устойчивость спирального течения между соосными цилиндрами. Автореф. канд. дис. Новосибирск, 1973. (Ин-т теплофизики СО АН СССР).
139. Лихачев О. А. Спектр малых возмущений течения в пограничном слое на плоской пластине.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1975, № 4, с. 112—115.
140. Лихачев О. А. Устойчивость и автоколебания течений типа пограничного слоя. Автореф. канд. дис. Новосибирск, 1975. (Ин-т теплофизики СО АН СССР).
141. Лихачев О. А. Автоколебательное течение в асимптотических пограничных слоях.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1976, № 2.
142. Лихачев О. А., Штерн В. Н. Автоколебательное МГД-течение в канале при продольном магнитном поле.— «Магнитная гидродинамика», 1975, № 3, с. 15—20.
143. Лихачев О. А., Штерн В. Н. Автоколебательное течение в пограничном слое.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1975, № 4, с. 106—112.
144. Лихачев О. А., Штерн В. Н. Устойчивость МГД-течения в наклонном внешнем поле.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1975, № 2, с. 3—7.
145. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973. 847 с.
146. Лутовинов В. М. О варианте метода прогонки в задачах устойчивости пограничного слоя.— «Уч. зап. Центр. аэрогидродинамич. ин-та», 1970, т. 1, № 2, с. 121—123.
147. Лутовинов В. М. О методе локализации собственных значений в одной задаче линейной теории гидродинамической устойчивости.— «Уч. зап. Центр. аэрогидродинамич. ин-та», 1971, № 2, с. 76—80.
148. Лутовинов В. М. Неустойчивость плоской пристеночной струи в несжимаемой жидкости.— «Уч. зап. Центр. аэрогидродинамич. ин-та», 1974, т. 4, № 6, с. 18—28.
149. Лутовинов В. М. Пример течения в пограничном слое с двумя областями неустойчивости.— «Уч. зап. Центр. аэрогидродинамич. ин-та», 1974, т. 4, № 6, с. 88—93.
150. Лутовинов В. М. Численное решение задачи гидродинамической устойчивости.— «Труды Центр. аэрогидродинамич. ин-та», 1975, вып. 1654.
151. Лятхер В. М. О механизме турбулентности.— В кн.: Динамика и термика рек. М., 1973, с. 90—95.
152. Лятхер В. М. Вероятностная природа турбулентных течений и пути замкнутого описания турбулентности.— В кн.: Турбулентные течения. М., 1974, с. 136—140.
153. Маркман Г. С. О конвективной неустойчивости слоя жидкости в модулированном поле внешних сил.— «Прикл. матем. и мех.», 1972, т. 36, № 1, с. 152—157.

154. Маркман Г. С. О возникновении периодических по времени вторичных конвективных течений.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1973, № 3, с. 58—63.
155. Маркман Г. С., Юдович В. Н. Об условиях неустойчивости чисто вращательных периодических течений идеальной жидкости.— В кн.: Матем. анализ и его приложения. Т. 3. Ростов-на-Дону, 1971, с. 50—69.
156. Мартинсон Л. К., Павлов К. Б., Симхович С. Л. Гидродинамическая устойчивость течения проводящей жидкости со степенным реологическим законом в поперечном магнитном поле.— «Магнитная гидродинамика», 1972, № 2, с. 35—40.
157. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, «Наука», 1973.
158. Медведев В. А. О применении метода Бубнова — Галеркина в теории гидродинамической устойчивости.— «Прикл. матем. и механ.», 1964, т. 28, № 4, с. 780—782.
159. Миллионщиков М. Д. Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости.— «Докл АН СССР», 1939, т. 22, № 5, с. 236—240.
160. Миллионщиков М. Д., Субботин В. И., Ибрагимов М. Х., Таранов Г. С., Гомоков И. П. Исследование гидравлического сопротивления в трубах с зернистой шероховатостью.— «Атомная энергия», 1974, т. 36, № 3, с. 186—188.
161. Миллионщиков М. Д., Субботин В. И., Ибрагимов М. Х., Таранов Г. С. Гидродинамические исследования труб с шероховатыми стенками.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Ч. 1. Новосибирск, 1975, с. 226—240.
162. Моисеенко Б. Д., Рождественский Б. Л., Сидорова В. К. Спектральные характеристики разностных схем и условия численного моделирования предельных режимов течений вязкой жидкости.— «Ж. вычисл. мат. и мат. физ.», 1974, т. 14, № 6, с. 1499—1515.
163. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. М., «Наука». Ч. 1, 1965, 639 с.; Ч. 2, 1967, 720 с.
164. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1974, № 3, с. 28—34.
165. Овчинникова С. Н. Устойчивость течения Куэтта в случае широкого зазора между вращающимися цилиндрами.— «Прикл. матем. и мех.», 1970, т. 34, № 2, с. 302—307.
166. Овчинникова С. Н. Асимптотика задачи устойчивости течения жидкости между вращающимися цилиндрами при малой вязкости.— В кн.: Физ.-матем. исслед. Ростов-на-Дону, 1972, с. 15—18.
167. Овчинникова С. Н. Исследование ветвления течения Куэтта между вращающимися цилиндрами.— В кн.: Труды 4-го Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1973, с. 56—62.
168. Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Устойчивость и бифуркация течения Куэтта в случае узкого зазора между вращающимися цилиндрами.— «Прикл. матем. и мех.», 1974, т. 38, № 6.

169. **Островский А. М.** Решение уравнений и систем уравнений. М., ИЛ, 1963. 219 с.
170. **Павлов К. Б.** Об устойчивости плоского течения Куэтта в присутствии магнитного поля.— В кн.: Вопросы магнитной гидродинамики и плазмы. Т. 2. Рига, 1962, с. 99—106.
171. **Павлов К. Б., Романов А. С., Симхович С. Л.** Гидродинамическая устойчивость течения Гартмана неньютоновской вязко-пластической жидкости.— «Магнитная гидродинамика», 1974, № 4.
172. **Павлов К. Б., Симхович С. Л.** Устойчивость течения Гартмана к двумерным возмущениям конечной амплитуды.— «Магнитная гидродинамика», 1972, № 2, с. 56—64.
173. **Павлов К. Б., Симхович С. Л.** Устойчивость течения Гартмана по отношению к трехмерным возмущениям конечной амплитуды.— В кн.: 7-е совещ. по магнитной гидродинамике. Т. 1. Рига, 1972, с. 49—51.
174. **Павлов К. Б., Тарасов Ю. А.** Об устойчивости вязкой проводящей жидкости между параллельными плоскостями в перпендикулярном магнитном поле.— «Прикл. матем. и мех.», 1960, т. 24, № 4, с. 723—725.
175. **Петров Г. И.** Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости.— «Прикл. матем. и мех.», 1940, т. 4, № 3, с. 3—12.
176. **Поляков Н. Ф.** Исследование частотных спектров возмущений в ламинарном пограничном слое в области перехода.— В кн.: Аэрофизич. исслед. Вып. 2. Новосибирск, 1973, с. 82—84.
177. **Пономаренко Ю. Б.** Об устойчивости плоского течения Куэтта.— «Прикл. матем. и мех.», 1968, т. 32, № 4, с. 606—614.
178. **Пономаренко Ю. Б.** Об устойчивости пространственно-периодических движений в гидродинамике.— «Прикл. матем. и мех.», 1973, т. 37, № 6, с. 1044—1048.
179. **Пухначев В. В.** Ветвление вращательно-симметричных решений, описывающих течение вязкой жидкости со свободной поверхностью.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1973, № 2, с. 127—134.
180. **Репик Е. У.** Обзор экспериментальных работ по турбулентным течениям.— «Труды семинара по моделям механики сплошной среды». Л., 1975.
181. **Репик Е. У., Соседко Ю. П.** Исследование прерывистой структуры течения в пристенной области турбулентного пограничного слоя.— В кн.: Турбулентные течения. М., 1974, с. 172—184.
182. **Репик Е. У., Соседко Ю. П., Тронина Н. С.** Исследование структуры течения в пристенной области турбулентного пограничного слоя.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Ч. 2. Новосибирск, 1976, с. 186—202.
183. **Рождественский Б. Л.** О применимости разностных методов решения уравнения Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, № 2, с. 308—311.
184. **Романов В. А.** Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 196, № 5, с. 1049—1051.
185. **Романов В. А.** Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта.— М., 1971, 26 с. (Ин-т проблем механики АН СССР. Препринт, № 1).

186. Ромашко Е. А. Об устойчивости вторичного течения Тэйлора между вращающимися цилиндрами с широким зазором.— «Инж.-физ. ж.», 1973, т. 25, № 1, с. 99—106.
187. Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1967. 232 с.
188. Сагалаков А. М. Устойчивость плоского течения Куэтта — Пуазейля в присутствии магнитного поля.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1970, № 6, с. 11—17.
189. Сагалаков А. М. Спектр малых возмущений плоского течения Куэтта — Пуазейля.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1971, № 2, с. 63—67.
190. Сагалаков А. М. Устойчивость плоского магнитогидродинамического течения Куэтта с асимметричным профилем скорости.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1971, № 3, с. 12—18.
191. Сагалаков А. М. Устойчивость плоскопараллельных магнитогидродинамических течений в поперечном магнитном поле. Автореф. канд. дис. Новосибирск, 1971. (Новосибирский гос. ун-т).
192. Сагалаков А. М. Устойчивость течения Гартмана.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1972, № 6, с. 17—31.
193. Сагалаков А. М. Устойчивость течения Гартмана.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 203, № 4, с. 772—775.
194. Сагалаков А. М. Устойчивость одного ламинарного течения проводящей жидкости в поперечном магнитном поле.— «Магнитная гидродинамика», 1974, № 3, с. 8—16.
195. Сагалаков А. М., Штерн В. Н. Устойчивость плоскопараллельных магнитогидродинамических течений в поперечном магнитном поле.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1970, № 3, с. 127—131.
196. Сагалаков А. М., Штерн В. Н. Энергетический анализ устойчивости плоскопараллельных течений с точкой перегиба в профиле скорости.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1971, № 6, с. 86—93.
197. Сагалаков А. М., Штерн В. Н. Энергетический анализ устойчивости магнитогидродинамических течений.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1971, № 4, с. 3—9.
198. Садовский В. С., Сеницына Н. П., Таганов Г. И. Численное исследование математической модели пристенного вязкого течения в турбулентном пограничном слое.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Ч. 1. Новосибирск, 1975, с. 94—116.
199. Сапожников В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки.— В кн.: Труды Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1969, с. 212—219.
200. Сапожников В. А. Численное решение задачи гидродинамической устойчивости. Автореф. канд. дис. Новосибирск, 1969. (Ин-т теплофизики СО АН СССР).
201. Сапожников В. А. Численное решение задач гидродинамической устойчивости.— В кн.: Труды секции по численным методам в газовой динамике 2-го Междунар. colloквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем. Т. 3. М., 1971, с. 1179—1192.
202. Сапожников В. А., Штерн В. Н. Численный анализ устойчивости плоского течения Пуазейля.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1969, № 4, с. 115—117.

203. Сапожников В. А., Штерн В. Н. Численный анализ устойчивости ламинарных течений между параллельными пластинами.— В кн.: Труды Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1969, с. 220—235.
204. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967. 428 с.
205. Систер В. Г., Вевировский М. М., Айзенбуд М. Б. О гидродинамической устойчивости пленки жидкости в поле центробежных сил.— В кн.: Некоторые вопросы исслед. вихревого эффекта и его промышленное применение. Куйбышев, 1974, с. 180—184.
206. Скобелев Б. Ю. Вторичные течения в плоскопараллельных потоках.— «Труды Всесоюз. школы по проблеме турбулентных течений жидкостей и газов. М., 1974.
207. Скрипачев В. В. Устойчивость ламинарного пограничного слоя на деформируемой поверхности мембранного типа.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1969, № 6, с. 52—56.
208. Скрипачев В. В. О теории Сквайра при исследовании гидродинамической устойчивости плоскопараллельных течений несжимаемой жидкости около деформируемых границ.— «Гидрмеханика», 1972, вып. 21, с. 75—79. (Респ. межвед. сб.).
209. Слепцов А. Г. Оценки собственных значений при исследовании устойчивости пограничного слоя.— «Численные методы механики сплошной среды», Новосибирск, 1974, т. 5, № 5, с. 101—107.
210. Слепцов А. Г. Сходимость метода локальной коллокации для обыкновенных дифференциальных уравнений.— «Ж. вычисл. матем. и мат. физ.», 1975, т. 15, № 6, с. 1447—1456.
211. Сопруненко И. П. Устойчивость струйных течений.— «Изв. АН СССР. Серия Механика», 1965, № 4, с. 31—35.
212. Струминский В. В. К нелинейной теории аэродинамической устойчивости.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, № 5, с. 1046—1049.
213. Струминский В. В. К нелинейной теории развития возмущений.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 153, № 3, с. 547—550.
214. Струминский В. В. О законах развития и стабилизации аэродинамических возмущений.— «Докл. АН СССР», 1965, 164, № 1.
215. Струминский В. В., Каниовская Е. М. Устойчивость несжимаемого пограничного слоя на скользящем крыле.— В кн.: Аэрогазодинамика. Новосибирск, 1973, с. 95—99.
216. Тарасов Ю. А. Устойчивость плоского пуазейлева течений плазмы с конечной проводимостью в магнитном поле.— «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1959, т. 27, № 6, с. 1708—1723.
217. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., ИЛ., 1959. 394 с.
218. Тверской Б. А. Об устойчивости течения хорошо проводящей жидкости поперек магнитного поля.— «Докл. АН СССР», 1962, т. 143, № 2, с. 301—304.
219. Терехова Н. М. Гидродинамическая устойчивость плоскопараллельной струи.— «Изв. Сиб. отд. АН СССР. Серия техн. наук», 1974, вып. 1, с. 79—89.
220. Тумин А. М. Развитие возмущения в изотропном турбулентном потоке несжимаемой жидкости.— «Численные методы механики сплошной среды», Новосибирск, 1975, т. 6, № 2, с. 126—129.

221. Тумин А. М. Расчет нейтральной кривой устойчивости для изотропных турбулентных течений типа Миллионщикова — Лойцянского.— «Численные методы механики сплошной среды», Новосибирск, 1975, т. 6, № 1, с. 107—108.
222. Уринцев А. Л. Возникновение автоколебаний в пограничном слое.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Новосибирск, 1975, с. 165—172.
223. Уринцев А. Л. Нелинейная задача о возникновении автоколебаний в результате потери устойчивости спирального течения в вязкой несжимаемой жидкости между соосными цилиндрами.— «Труды V Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Ч. 1. Новосибирск, 1975, с. 79—84.
224. Фаддеев Л. Д. К теории устойчивости стационарных плоскопараллельных течений идеальной жидкости.— «Зап. науч. семинаров Ленинградского отд. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 21, с. 164—172.
225. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1973, 256 с.
226. Хабахпашева Е. М. Некоторые данные о структуре течений в вязком подслое.— В кн.: Проблемы теплофизики и физической гидродинамики. Новосибирск, 1974, с. 223—234.
227. Хабахпашева Е. М., Михайлова Е. С., Перепелица Б. В., Ефименко Г. И. Экспериментальное исследование структуры пристенной турбулентности.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Ч. 2. Новосибирск, 1975, с. 138—161.
228. Харин В. Т. О вычислении собственных значений методом Бубнова — Галеркина и применение его в теории гидродинамической устойчивости.— «Прикл. матем. и мех.», 1965, т. 29, № 6, с. 1111—1115.
229. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963, 680 с.
230. Цинобер А. Б. Магнитогидродинамическое обтекание тел. Рига, «Зинатне», 1970, 291 с.
231. Цинобер А. Б. Воздействие магнитного поля на нелинейные гидродинамические процессы в жидких металлах. Автореф. докт. дис. Рига, 1974, 34 с.
232. Цинобер А. Б. Магнитогидродинамическая турбулентность.— «Магнитная гидродинамика», 1975, № 1, с. 7—22.
233. Чельшков В. С. Устойчивость центрального положения внутреннего цилиндра в течении Куэтта.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1974, № 6, с. 158—161.
234. Чудненко А. П. Пространственное и временное развитие возмущений в плоском канале.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1970, № 4, с. 176—177.
235. Шкадов В. Я. О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных течениях вязкой жидкости.— «Науч. тр. Ин-та мех. МГУ», 1971, № 9, с. 4—28.
236. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости.— «Науч. тр. Ин-та мех. МГУ», 1973, № 25.
237. Шкадов В. Я. О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельном течении.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1973, № 2, с. 49—57.

238. Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. М., ИЛ, 1962. 201 с.
239. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974. 711 с.
240. Штерн В. Н. Устойчивость плоского течения Куэтта.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1969, № 5, с. 117—119.
241. Штерн В. Н. Спектр малых возмущений плоского течения Куэтта.— «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1970, № 1, с. 189—190.
242. Штерн В. Н. Устойчивость плоского течения Куэтта. Автореф. канд. дис. Новосибирск, 1970. 16 с. (Ин-т теплофизики СО АН СССР).
243. Штерн В. Н. Энергетический анализ турбулентного течения в канале.— В кн.: Вопросы гидродинамики и теплообмена. Новосибирск, 1972, с. 239—249.
244. Штерн В. Н. Глобальная и локальная устойчивость течений вязкой жидкости. Приложение 3-е.— В кн.: Кутателадзе С. С. Пристенная турбулентность. Новосибирск, 1973, с. 191—204.
245. Штерн В. Н. О неустойчивости к трехмерным возмущениям.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1976, № 5, с. 29—34.
246. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.— «Докл. АН СССР», 1965, т. 161, № 5, с. 1037—1040.
247. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости.— «Прикл. матем. и мех.», 1965, т. 29, № 3, с. 453—467.
248. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами.— «Прикл. матем. и мех.», 1966, т. 30, № 4, с. 688—698.
249. Юдович В. И. О бифуркации вращательных течений жидкости.— «Докл. АН СССР», 1966, т. 169, № 2, с. 306—309.
250. Юдович В. И. Пример потери устойчивости и рождения вторичного течения жидкости в замкнутом сосуде.— «Мат. сб.», 1967, т. 74 (116), № 4, с. 565—579.
251. Юдович В. И. О возникновении автоколебаний в жидкости.— «Прикл. матем. и мех.», 1971, т. 35, № 4, с. 638—655.
252. Юдович В. И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости и относительно длинноволновых периодических возмущений.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1973, № 1, с. 32—35.
253. Яненко Н. Н., Новиков В. А. Об одной модели жидкости с знакопеременным коэффициентом вязкости.— «Численные методы механики сплошной среды». Новосибирск, 1973, т. 4, № 2.
254. Abas S. Stability of Hartmann boundary layer under the influence of a parallel magnetic field.— «J. Fluid Mech.», 1968, v. 32, № 4, p. 721—736.
255. Andrade E. N. da S. «Proc. Phys. Soc.», 1939, v. 51.
256. Anshus B. E., Goren S. L. A method of getting approximate solutions to the Orr-Sommerfeld equation for on a vertical wall.— «AIChE J.», 1966, v. 12, № 5, p. 1004—1008.
257. Beeverc C. E. On the stability of the equation of binary mixture of compressible Newtonian fluids.— «Lett. Appl. and Eng. Sci.», 1973, v. 1, № 6, p. 543—553.

258. **Bendor E.** Stability waves in plane shear layers.—“J. méç.”, 1974, v. 13, № 1, p. 31—50.
259. **Benney D. J., Bergeron R. F.** A new class of nonlinear waves in parallel flows.—“Stud. Appl. Math.”, 1969, v. 48, № 3, p. 181—204.
260. **Betchov R., Criminale W. O.** Spatial instability of a viscous jet and wake.—“Phys. Fluids”, 1966, v. 9, № 2, p. 359—362.
261. **Bhatnagar R. K., Vekataraman P. K.** Stability of generalized plane Couette flow of a second order fluid.—“J. méç.”, 1973, v. 12, № 3, p. 393—404.
262. **Bojadjev Ch., Krylov V. S.** Analysis of stability of laminar liquid film flow.—“Chem. Eng. J.”, 1973, v. 6, № 3, p. 225—232.
263. **Bose B.** Some measurement in pipe flow.—“AIAA J.”, 1971, № 7, p. 1405—1407.
264. **Bouthier M.** Stabilité linéaire des écoulements presque parallèles. I part.—“J. méç.”, 1972, v. 11, № 4, p. 599—621.
265. **Bouthier M.** Stabilité linéaire des écoulements presque parallèles. II part. La couche limite de Blasius.—“J. méç.”, 1973, v. 12, № 1, p. 75—95.
266. **Bradbury L. J. S.** The structure of a self-preserving turbulent plane jet.—“J. Fluid Mech.”, 1965, v. 23, № 1, p. 31—64.
267. **Breslin J. A.** An experimental investigation of laminar turbulent transition in flow through a rectangular pipe.—“Lehigh Univ. Techn. Rep.”, 1970, № 22.
268. **Brodkey R. S., Nychas S. G., Taraba J. I., Wallace J. M.** Turbulent energy production, dissipation and transfer.—“Phys. Fluids”, 1973, v. 16, № 11, p. 2010—2011.
269. **Brown W. B.** A stability criterion for three-dimensional laminar boundary layers.—In: Boundary layer and flow control. V. 2. London, 1961, p. 913—923.
270. **Bruin G. J.** Stability of a layer of liquid flowing down an inclined plane.—“J. Eng. Math.”, 1974, v. 8, № 3, p. 259—270.
271. **Burkhalter J. E., Kosehmieder E. L.** Steady supercritical Taylor vortex flow.—“J. Fluid Mech.”, 1973, v. 58, № 3, p. 547—560.
272. **Busse F. H.** Bounds of the transport of mass and momentum by turbulent flow between parallel plates.—“Z. angew. Math. und Phys.”, 1969, Bd. 20, № 1, S. 1—15.
273. **Busse F. H.** Bounds for turbulent shear flow.—“J. Fluid Mech.”, 1970, v. 41, № 21, p. 219—240.
274. **Butler H. W., McKee D. E.** A variational solution to the Taylor stability problem based upon non-equilibrium thermodynamics.—“Int. J. Heat and Mass Transfer”, 1970, v. 13, № 1, p. 43—54.
275. **Carmi S.** Energy stability of channel flows.—“Z. angew. Math. und Phys.”, 1969, Bd. 20, № 4, S. 487—500.
276. **Carmi S.** Linear stability of axial flow in an annular pipe.—“Phys. Fluids”, 1970, v. 13, № 3, p. 829—831.
277. **Carmi S.** Non-linear stability of hydromagnetic flows.—“Isr. J. Technol.”, 1972, v. 10, № 1—2, p. 145—151.
278. **Carmi S.** Nonlinear stability of a two-dimensional laminar jet.—“J. méç.”, 1974, v. 13, № 2, p. 185—195.
279. **Carmi S., Ebenstein S.** A note on stability in unbounded domains.—“Z. angew. Math. und Mech.”, 1974, Bd. 54, № 10.

280. **Carmi S., Lalas D. P.** Universal stability of hydromagnetic flows.—“J. Fluid Mech.”, 1970, v. 43, № 4, p. 711—719.
281. **Case K. M.** Stability of inviscid plane Couette flow.—“Phys. Fluids”, 1960, v. 3, № 2, p. 143—149.
282. **Case K. M.** Hydrodynamic stability and the inviscid limit.—“J. Fluid Mech.”, 1961, v. 10, № 3, p. 420—429.
283. **Case K. M.** Hydrodynamic stability and the initial value problem.—In: Hydrodynam. instability. *Prov. R. I. Amer. Math. Soc.*, 1962, p. 25—33.
284. **Chan Y. Y.** Spatial waves in turbulent jets. Part. 2.—“Phys. Fluids”, 1974, v. 17, № 9, p. 1667—1670.
285. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. London, Clarendon press, 1961. 652 p.
286. **Charnay G., Comte-Bellot G., Mathieu J.** Bilans de l'énergie cinétique turbulente à travers une couche limite perturbée.—“C. r. Acad. sci.”, 1973, v. 277, № 22, p. 1119—1122.
287. **Chen C. F., Liu O. C. S., Shok M. W.** Stability of circular Couette flow with constant finite acceleration.—“Trans. ASME. E”, 1973, v. 40, № 2, p. 347—354.
288. **Chen T. S., Huang L. M.** Hydrodynamic stability of boundary layers with surface suction.—“AIAA J.”, 1972, v. 10, № 10, p. 1366—1367.
289. **Chen T. S., Joseph D. D.** Subcritical bifurcation of plane Poiseuille flow.—“J. Fluid Mech.”, 1973, v. 58, № 2, p. 337—352.
290. **Chok D. P., Schlechter R. S.** Critical Reynolds number of the Orr—Sommerfeld equation.—“Phys. Fluids”, 1973, v. 16, № 2, p. 329—330.
291. **Chun D. H., Schwarz W. H.** Stability of the plane incompressible viscous wall jet subjected to small disturbances.—“Phys. Fluids”, 1967, v. 10, № 5, p. 911—915.
292. **Clenshow C. W., Elliot D. A.** A numerical treatment of the Orr—Sommerfeld equation in the case of a laminar jet.—“Quart. J. Mech. and Appl. Math.”, 1960, v. 13, № 3, p. 300—313.
293. **Coles D.** Interface and intermittency in turbulent shear flow.—In: *Mechanique de la turbulence (Coll. Intern. die CNRS Marseille)*, Paris, 1962, p. 229—248.
294. **Coles D.** The law of the wake in turbulent boundary layer.—“J. Fluid. Mech.”, 1956, v. 1, № 3, p. 191—226.
295. **Corcus G. M.** The structure of the turbulent pressure field in boundary layer flow.—“J. Fluid Mech.”, 1964, v. 18, № 3, p. 353—378.
296. **Corino E. K., Brodkey R. S.** A visual investigations of the wall region in turbulent flow.—“J. Fluid Mech.”, 1969, v. 37, № 1, p. 1—30.
- См. также: Коринно Е. П., Бродки Р. С. Визуальное исследование пристеночной области в турбулентном течении.—«Механика», 1971, № 1, с. 56—82.
297. **Corner D., Barry M. D. J., Ross M. A.** Non-linear stability theory of the flat plate boundary layer.—“Aeronaut. Res. Counc. Curr. Pap.”, 1973 (1974), № 1296, 21 p.
298. **Corrsin S.** Heat transfer in isotropic turbulence.—“J. Appl. Phys.”, 1952, v. 23, № 1, p. 112—118.

299. **Craik A. D. D.** Eigenvalue bounds in linear inviscid stability theory.—“*J. Fluid Mech.*”, 1972, v. 53, № 4, p. 657—670.
300. **Craik A. D. D.** Nonlinear resonant instability in boundary layers.—“*J. Fluid Mech.*”, 1971, v. 50, № 2, p. 393—413.
301. **Craik A. D. D.** Resonant gravity-wave interactions in a shear flow.—“*J. Fluid Mech.*”, 1968, v. 34, № 3, p. 531—550.
302. **Craik A. D. D.** Second order resonance and subcritical instability.—“*Proc. Roy. Soc. London. A*”, 1975, v. 343, № 1634, p. 351—362.
303. **Curle N.** Hydrodynamic stability of laminar wakes.—“*Phys. Fluids*”, 1958, v. 1, p. 159—160.
304. **Darcy H.** Recherches experimentales relatives aux mouvement de l'eau dans des tuyaux.—“*Mém. Sav. Etrang. Acad. Sci.*”, 1858, v. 15, p. 265—342.
305. **Datta S. K.** Stability of spiral flow between rotating cylinders at low axial Reynolds number.—“*J. Fluid Mech.*”, 1965, v. 21, № 4, p. 635—640.
306. **Davey A.** On the stability of plane Couette flow to infinitesimal disturbances.—“*J. Fluid Mech.*”, 1973, v. 57, № 2, p. 369—380.
307. **Davey A., Drazin P. G.** The stability of Poiseuille flow in a pipe.—“*J. Fluid Mech.*”, 1969, v. 36, № 2, p. 209—218.
308. **Davey A., Nguyen H. P. F.** Finite — amplitude stability of pipe flow.—“*J. Fluid Mech.*”, 1971, v. 45, № 4, p. 701—720.
309. **Davies P. O. A., Yule A. J.** Coherent structures in turbulence.—“*J. Fluid Mech.*”, 1975, v. 69, № 3, p. 513—537.
310. **Davis R. E.** Perturbed turbulent flow eddy viscosity and generation of turbulent stresses.—“*J. Fluid Mech.*”, 1974, v. 63, № 4, p. 673—693.
311. **Davis S., Korczek C.** A reformation of energy stability theory.—“*Arch. Ration. Mech. and Anal.*”, 1973, v. 52, № 2, p. 112—117.
312. **Davis S. J., White C. M.** An experimental study of flow of water in pipes of rectangular section.—“*Proc. Roy. Soc.*”, 1928, v. 119, № 781, p. 92—107.
313. **Deardorff J. W.** On the stability of viscous plane Couette flow.—“*J. Fluid Mech.*”, 1963, v. 15, № 4, p. 623—631.
314. **Di Prima R. S.** The stability of a viscous fluid between rotating cylinders with an axial flow.—“*J. Fluid Mech.*”, 1960, v. 9, № 4, p. 621—629.
315. **Di Prima R. S., Habetler G. J.** A completeness theorem for non-selfadjoint eigenvalue problems in hydrodynamic stability.—“*Arch. Ration. Mech. and Anal.*”, 1969, v. 34, № 3, p. 218—227.
316. **Di Prima R. S., Stuart J. T.** Non-local effects in stability of flow between eccentric rotating cylinders.—“*J. Fluid Mech.*”, 1972, v. 54, № 3, p. 393—415.
317. **Di Prima R. S., Stuart J. T.** Stability and growth of Taylor vortices in the flow between eccentric rotating cylinders.—XIII Междунар. конгр. по теор. и прикл. мех., 1972. Сб. аннотаций. М., «Наука», 1972, 43 с.
318. **Dixon T. N., Hellums J. D.** A study on stability and incipient turbulence in Poiseuille and plane Poiseuille flow by numerical finite-difference simulation.—“*AIChE J.*”, 1967, v. 13, № 5.

319. **Dolph C. L., Lewis D. C.** On the application of infinite systems of ordinary differential equations to perturbations of plane Poiseuille flow.—“Quart. Appl. Math.”, 1958, v. 16, p. 97—110.
320. **Donnelly R. J., Fultz D.** Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders. II. Visual observations.—“Proc. Roy. Soc. A”, 1960, v. 258, № 1292, p. 101—123.
321. **Donnelly R. J., Schwarz K. W., Roberts P. R.** Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders.—“Proc. Roy. Soc. A”, 1965, v. 283, № 1395, p. 531—556.
322. **Dowell E. H.** Non-linear theory of unstable plane Poiseuille flow.—“J. Fluid Mech.”, 1969, v. 38, № 2, p. 401—414.
323. **Drazin P. G.** Stability of parallel flow in a parallel magnetic field at small magnitude Reynolds number.—“J. Fluid. Mech.”, 1960, v. 8, № 1, p. 130—142.
324. **Drazin P. G.** Stability of a broken-line jet in a parallel magnetic fields.—“J. Math. Phys.”, 1961, v. 39, № 1, p. 49—53.
325. **Dudis J. J., Davis S. H.** Energy stability of the Ekman buoyance boundary layers.—“J. Fluid Mech.”, 1971, v. 47, № 2, p. 381—405.
326. **Dudis J. J., Davis S. H.** Energy stability of the Ekman boundary layers.—“J. Fluid Mech.”, 1971, v. 47, № 2, p. 405—413.
327. **Eckelmann H.** The structure of the viscous sublayer and adjacent wall region in a turbulent channel flow.—“J. Fluid Mech.”, 1974, v. 65, № 3, p. 439—460.
328. **Eckhows W.** Studies in non-linear stability theory. N. Y. Springer, 1962.
329. **Einstein N. A., Li H.** The viscous sublayer along a smooth boundary.—“J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.”, 1956, v. 82, pap. 945, 1—27.
330. **Ellingsen T., Glevik B., Palm E.** On the non-linear stability of plane Couette flow.—“J. Fluid Mech.”, 1970, v. 40, № 1, p. 97—112.
331. **Engevik L.** The stream function within the critical layer of a shear flow in a stratified and incompressible fluid.—“Acta mech.”, 1974, v. 19, № 3—4, p. 169—178.
332. **Page A., Townend H. H.** An examination of turbulent flow with an ultramicroscope.—“Proc. Roy. Soc. A”, 1932, v. 135, № 828, p. 656—677.
333. **Florea J., Panactescu V.** Sur l'étude de la stabilité du mouvement d'un fluide à l'aide des calculateurs analogiques.—“Bull. Inst. politehn. Gh. Gheorghiu-Dej”, Bucuresti, 1973, v. 35, № 3, p. 75—90.
334. **Fu T. S., Joseph D. D.** Linear instability of axymmetric flow in channels.—“Phys. Fluids”, 1970, v. 13, № 2, p. 217—221.
335. **Fung Y. T., Kurzweg U. H.** Nonaximmetric modes of instability in heterogenous swirling flow.—“Phys. Fluids”, 1973, v. 16, № 11, p. 2016—2017.
336. **Gage K. S., Miller J. R.** Linear viscous stability analysis of the stratified Bickley jet.—“Phys. Fluids”, 1974, v. 17, № 5, p. 883—887.
337. **Gage K. S.** Linear viscous stability theory for stable stratified shear flow: a review.—“Boundary Layer Meteorol.”, 1975, v. 5, № 1/2, p. 3—17.

338. **Gallagher A. P.** On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow. Part 3. The phenomena of modeairing.—“J. Fluid Mech.”, 1974, v. 65, № 1, p. 29—32.
339. **Gallagher A. P., Mercer A. McD.** On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow.—“J. Fluid Mech.”, 1962, v. 13, № 1, p. 91—100.
340. **Gallagher A. P., Mercer A. McD.** On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow. Part 2. Higher eigenvalues.—“J. Fluid Mech.”, 1964, v. 18, № 3, p. 350—352.
341. **Garg V. K., Rouleau W. T.** Stability of Poiseuille flow in a thin elastic tube.—“Phys. Fluids”, 1974, v. 17, № 6, p. 1103—1108.
342. **Gaster M. A.** A note on the relation between temporally — increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability.—“J. Fluid. Mech.”, 1962, v. 14, № 2, p. 222—224.
343. **George W. O., Hellums J. D.** Hydrodynamic stability in plane Poiseuille flow with finite amplitude disturbances.—“J. Fluid Mech.”, 1972, v. 51, № 4, p. 687—704.
344. **George W. D., Hellums J. D., Martin B.** Finite — amplitude neutral disturbances in plane Poiseuille flow.—“J. Fluid. Mech.”, 1974, v. 63, № 4, p. 765—771.
345. **Georgescu A.** Theorems of Joseph's type in hydrodynamic stability theory.—“Rev. roum. math. pures et appl.”, 1971, v. 16, № 3, p. 355—362.
346. **Gersting J. M., Jankowski D. F.** Numerical methods for Orr — Sommerfeld problems.—“Int. J. Num. Meth. Eng.”, 1972, v. 4, № 2, p. 195—206.
347. **Gibson R. D., Cook A. E.** The stability of curved channel flow.—“Quart. J. Mech and Appl. Math.”, 1974, v. 27, № 2, p. 149—160.
348. **Goldshhtik M. A., Sapozhnikov V. A., Shtern V. N.** Differential factorization method in problems of hydrodynamic stability.—“Proc. GAMM Conf. Numer. Methods in Fluid Mech.”. Köln, DFVLR, 1975. p. 52—59.
349. **Goldshhtik M. A., Shtern V. N.** Theoretical approach to wall boundary turbulence. Preprint 02-75. Novosibirsk, 1975. (Thermophysics Inst.).
350. **Goldstein B.** The stability of viscous fluid flow between rotating cylinders.—“Proc. Cambridge Phil. Soc.”, 1957, v. 33, p. 41—61.
351. **Gotoh K.** A stability condition in parallel flows of small magnetic Reynolds number.—“J. Phys. Soc. Japan”, 1971, v. 31, № 1, p. 317.
352. **Graebel W. P.** The stability of pipe flow. Part I. Asymptotic analysis for small wave-numbers.—“J. Fluid Mech.”, 1970, v. 43, № 2, p. 279—290.
353. **Grass A. J.** Structural features of turbulent flow over smooth and rough boundaries.—“J. Fluid Mech.”, 1971, v. 50, № 2, p. 233—255.
354. **Green C. H., Ellen C. H.** The stability of plane Poiseuille flow between flexible walls.—“J. Fluid Mech.”, 1972, v. 51, № 2, p. 403—416.
355. **Grohne D.** Ein Beitrag zur nichtlinearen Stabilitätstheorie von ebenen Laminarströmungen.—“Z. angew. Math. und Mech.”, 1972, Bd. 52, № 5, S. 256—257.

356. **Grohne D.** Über das Spektrum der Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen.—“Z. angew. Math. und Mech.”, 1954, Bd. 34, № 3, S. 344—357.
357. **Grosch C. E., Salwen H.** Hydrodynamic stability of a modulated shear flow.—“Phys. Rev. Lett.”, 1967, v. 18, № 22, p. 946—948.
358. **Grosch C. E., Salwen H.** The stability of steady and time-developing plane Poiseuille flow.—“J. Fluid Mech.”, 1968, v. 34, № 1, p. 177—205.
359. **Haberman R.** Critical layers in parallel flows.—“Stud. Appl. Math.”, 1972, v. 51, № 2, p. 139—161.
360. **Hagen G.** Über die Bewegung des Wassers in engen Zylindrischen Röhren.—“Pogg. Ann.”, 1839, Bd. 46, S. 423—442.
361. **Hagen G.** Über den Einfluss der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren.—“Math. Abh. Akad. Wiss. (aus dem Jahr 1854)”, 1855, S. 17—98.
362. **Hains F. D.** Stability diagrams for magnetogasdynamic channel flow.—“Phys. Fluids”, 1965, v. 8, № 11, p. 2014—2019.
363. **Hains F. D.** Stability of plane Couette-Poiseuille flow. Part 1.—“Phys. Fluids”, 1967, v. 10, № 9, p. 2079—2080.
364. **Hains F. D.** Stability of plane Couette-Poiseuille flow with uniform crossflow.—“Phys. Fluids”, 1971, v. 14, № 8, p. 1620—1623.
365. **Hains F. D., Price J. F.** Effect of a flexible wall on the stability of Poiseuille flow.—“Phys. Fluids”, 1962, v. 5, № 3, p. 365.
366. **Hanratty T. J., Thomas J.** Turbulent exchange of mass and momentum with a boundary.—“AIChE J.”, 1956, v. 2, № 3, p. 359—362.
367. **Hansen N. E. O.** Stability of turbulent flow in a steep two-dimensional open channel.—“Rept. Dan. Center Appl. Math. and Mech.”, 1971, v. 16, 23 p.
368. **Hassard B. D., Chang T. S., Ludford G. S. S.** Expansion function with boundary-layers behavior and the Orr—Sommerfeld equation.—“J. Math. Anal. and Appl.”, 1974, v. 46, № 2, p. 463—477.
369. **Heisenberg W.** Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen.—“Ann. Phys.”, 1924, Bd. 74, № 7, S. 577—627.
370. **Hocking L. M.** Non-linear instability of the asymptotic suction velocity profile.—“Quart. J. Mech. and Appl. Math.”, 1975, v. 28, № 3, p. 341—353.
371. **Hocking L. M.** On the structure of instability bursts in the three-dimensional parallel flow.—“Mathematika”, 1975, v. 21, № 1, p. 134—146.
372. **Hocking L. M.** A numerical study of a mildly non-linear partial differential equation.—“Lect. Notes Phys.”, 1973, v. 18, p. 112—119.
373. **Hocking L. M., Stewartson K.** On the non-linear response of a marginally unstable plane parallel flow to a three-dimensional disturbance.—“Proc. Roy. Soc. London. A”, 1972, v. 326, № 1566, p. 289—313.
374. **Hoiland E.** On two-dimensional perturbations of linear flow.—“Geofys. publ.”, 1953, v. 18, № 9, p. 1—12.
375. **Hopf E.** Statistical hydromechanics and functional calculus.—“J. Rat. Mech. Anal.”, 1952, v. 1, № 1, p. 87—123.

376. **Hopf L.** Der Verlauf kleiner Schwingungen auf einer strömung reibender Flüssigkeit.—“Ann. Phys.”, 1914, Bd. 44, № 1, S. 1—60
377. **Howard L. H.** Hydrodynamic stability of jet.—“J. Math. and Phys.”, 1959, v. 39, № 4, p. 283—298.
378. **Huang L. M., Chen T. S.** Stability of developing laminar pipe flow.—“Phys. Fluids”, 1974, v. 17, № 1, p. 245—247.
379. **Huang L. M., Chen T. S.** Stability of developing pipe flow subjected to non-axisymmetric disturbances.—“J. Fluid Mech.”, 1974, v. 63, № 1, p. 183—193.
380. **Hughes B. A.** Nonlinear resonant inertial wave interactions.—“Phys. Fluids”, 1973, v. 16, № 11, p. 1805—1809.
381. **Hughes T. N.** Variable mesh numerical method for solving the Orr—Sommerfeld equation.—“Phys. Fluids”, 1972, v. 15, № 5, p. 725—728.
382. **Hughes T. N., Reid W. A.** On the stability of the asymptotic suction boundary layer profile.—“J. Fluid Mech.”, 1965, v. 23, № 4, p. 715—735.
383. **Hughes T. N., Reid W. A.** The stability of spiral flow between rotating cylinders.—“Philos. Trans. Roy. Soc. London. A”, 1968, v. 263, № 1135, p. 57—91.
384. **Hunt J. C. R.** On the stability of parallel flows with parallel magnetic fields.—“Proc. Roy. Soc. A”, 1966, v. 293, № 1434, p. 342—358.
385. **Hussain A. K. M., Reynolds W. C.** The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow.—“J. Fluid Mech.”, 1970, v. 41, № 2, p. 241—258.
386. **Hussain A. K. M., Reynolds W. C.** The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part II. Experimental results.—“J. Fluid Mech.”, 1972, v. 54, № 2, p. 241—262.
387. **Ikeda Norito.** Application of the Fourier expansion method to the problem of stability of a plane jet.—“J. Phys. Soc. Japan”, 1969, v. 27, № 4, p. 1035—1040.
388. **Inger G. R.** A unified theory of small disturbances within compressible laminar and turbulent boundary layers.—“Técnica (Port)”, 1974, v. 36, № 422, p. 79—88.
389. **Iooss G.** Theorie non lineaire de la stabilité des écoulements Laminaires.—“Rech. aérop.”, 1970, v. 1, p. 7—14.
390. **Iooss G.** Theorie non lineaire de la stabilité des écoulements laminaires dans le cas de l'échange des stabilités.—“Arch. Ration. Mech. and Anal.”, 1971, v. 40, № 3, p. 166—208.
391. **Iooss G.** Bifurcation of a T-periodic flow towards and nT periodic flow and their non-linear stabilities.—“Arch. Mech. Stosow.”, 1974, v. 26, № 5, p. 795—804.
392. **Iooss G.** Bifurcation of a periodical solution of the Navier—Stokes equations into an invariant torus.—“Arch. Ration. Mech. and Anal.”, 1975, v. 58, № 1, p. 35—56.
393. **Ishigai Scikan, Nakanisi S.** Stability of failing liquid film.—“Technol. Repts Osaka Univ.”, 1974, v. 24, p. 227—238.
394. **Itoh N.** A power series method for the numerical treatment of the Orr—Sommerfeld equation.—“Trans. Jap. Soc. Aeronaut. and Space Sci.”, 1974, v. 17, № 36, p. 65—75.

395. **Itoh N.** Spatial growth of finite wave disturbances in parallel and nearly parallel flows. Part 1. The theoretical analysis and numerical results for plane Poiseuille flow. Part. 2. The numerical results for plate boundary layer.—“Trans. Jap. Soc. Aeronaut. and Sci.”, 1974, v. 17, № 38, p. 160—186.
396. **Jankowski D. F.** The energy stability limit for the asymptotic suction profile.—“Trans. ASME. E”, 1973, v. 40, № 3, p. 817—819.
397. **Jankowski D. F., Takeuchi D. J., Gersting J. M. Jr.** The Riccati transformation in the numerical solution of Orr—Sommerfeld problems.—“Trans. ASME. E”, 1972, v. 39, № 1, p. 280—281.
398. **Jordinson R.** The flat plate boundary layer. Part 1. Numerical integration of the Orr—Sommerfeld equation.—“J. Fluid. Mech.”, 1970, v. 43, № 4, p. 801—811.
399. **Joseph D. D.** Nonlinear stability of the Boussinesq equations.—“Arch. Ration. Mech. and Anal.”, 1966, v. 22, p. 163.
400. **Joseph D. D.** Eigenvalue bounds for the Orr—Sommerfeld equation.—“J. Fluid Mech.”, 1968, v. 33, № 3, p. 617—621.
401. **Joseph D. D.** Eigenvalue bounds for the Orr—Sommerfeld equation. Part 2.—“J. Fluid Mech.”, 1969, v. 36, № 4, p. 721—734.
402. **Joseph D. D.** Response curve for plane Poiseuille flow.—“Adv. Appl. Mech.”, 1974, v. 14, p. 241—278.
403. **Joseph D. D., Carmi S.** Stability of Poiseuille flow in pipes, annuli and channels.—“Quart. Appl. Math.”, 1969, v. 24, № 4, p. 575—599.
404. **Joseph D. D., Munson B. R.** Global stability of spiral flow.—“J. Fluid Mech.”, 1970, v. 43, № 3, p. 545—577.
405. **Joseph D. D., Sattinger D. N.** Bifurcating time periodic solutions and their stability.—“Arch. Ration. Mech. and Anal.”, 1972, v. 45, № 2, p. 79—109.
406. **Kakutani T.** The hydrodynamic stability of the modified plane Couette flow in the presence of a transverse magnetic field.—“J. Phys. Soc. Japan”, 1964, v. 19, № 6, p. 1041—1057.
407. **Kao T. W., Park C.** Experimental investigation of the stability of channel flow. Part 1. Flow of a single liquid in a rectangular channel.—“J. Fluid Mech.”, 1970, v. 43, № 1, p. 145—164.
408. **Kaplan R. E.** The stability of laminar incompressible boundary layers in the presence of compliant boundaries.—“Massachusetts Inst. Technol. Aeroelastic and Structure Res. Lab.”, 1964, p. 1—116.
409. **Kármán Th. von.** Über laminare und turbulente Reibung.—“Z. angew. Math. und Mech.”, 1921, Bd. 1.
410. **Karnits M. A., Potter M. C., Smith M. C.** An experimental investigation of transition of a plane Poiseuille flow.—“Trans. ASME. I”, 1974, v. 96, № 4, p. 384—388.
411. **Kaye J., Elgar E. C.** Modes of adiabatic and diabatic fluid flow in an annulus with an inner rotating cylinder.—“Trans. ASME”, 1958, v. 80, № 3, p. 753—765.
412. **Kelvin.** Rectilinear motion of a viscous fluid between parallel plates.—“Mathem. and Phys. Papers”, 1887, v. 4, p. 321—330.
413. **Kerczek C., Davis S. H.** The stability of oscillatory Stokes layers.—“Stud. Appl. Math.”, 1972, v. 51, № 3, p. 239—252.

414. **Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M.** The threedimensional nature of boundary-layer instability.—“*J. Fluid Mech.*”, 1962, v. 12, № 1, p. 1—34.
415. **Kline S. J., Reynolds W. C., Schraub F. A., Runstadler P. W.** The structure of turbulent boundary layers.—“*J. Fluid Mech.*”, 1967, v. 30, № 4, p. 741—743.  
См. также: Клайн С., Рейнольдс У., Шрауб Ф., Ранстэдлер П. Структура турбулентных пограничных слоев.—«*Механика*», 1969, № 4, с. 41—78.
416. **Ko Sung Hwan.** On the stability of plane Poiseuille flow with a finite conductivity in a aligned magnetic field.—“*J. Fluid Mech.*”, 1968, v. 33, № 3, p. 433—444.
417. **Ko Sung Hwan, Lessen Martin.** Viscous instability of an incompressible full jet.—“*Phys. Fluids*”, 1969, v. 12, № 11, p. 2270—2273.
418. **Kobayashi R.** Stability of linear boundary layer on a concave permeable wall with homogeneous suction.—“*Sci. Repts Res. Inst. Tohoku Univ. Ser. B: High Speed Mech.*”, 1973, v. 27, p. 31—47.
419. **Kohlman D.** Experiments on cylinder drag, sphere drag and stability in rectilinear Couette flow. MIT Fluid Dynam. Res. Lab. Rept. N. 1 (Clearinghouse Feder. Sci. and Techn. Inform. N. AD-400562). S. 1., 1963, XII. 145 p.
420. **Kraichnan R. H.** Instability on fully developed turbulence.—“*Phys. Fluids*”, 1970, v. 13, № 3, p. 569—575.
421. **Krantz W. B., Owen W., Brechner.** Spatial formulation of Orr — Sommerfeld equation for thin liquid films flowing down a plane.—“*AICHE J.*”, 1973, v. 19, № 6, p. 1163—1169.
422. **Krueger E. R., Cross A., Di Prima R. C.** On the relative importance of Taylor-vortex and non-axisymmetric in flow between rotating cylinders.—“*J. Fluid Mech.*”, 1966, v. 24, № 3, p. 521—528.
423. **Krueger E. R., Di Prima R. C.** The stability of a viscous fluid between rotating cylinders with an axial flow.—“*J. Fluid. Mech.*”, 1964, v. 19, № 4, p. 528—538.
424. **Kümmerer H.** Integration einer erweiterten Orr — Sommerfeld — Gleichung zur Stabilitätsuntersuchung laminarer Grenzschichtströmungen.—“*Z. angew. Math. und Mech.*”, 1973, Bd. 53, № 4, S. 108—110.
425. **Kurtz E. F., Crandall S. H.** Computer-aided analysis of hydrodynamic stability.—“*J. Math. and Phys.*”, 1962, v. 41, № 4, p. 264—279.
426. **Kuwabara S.** Non-linear instability of plane Couette flow.—“*Phys. Fluids*”, 1967, v. 10, № 9 (2), p. 115—116.
427. **Kuwabara S.** Non-linear stability of the plane Couette and Hagen-Poiseuille flow.—“*J. Phys. Soc. Japan*”, 1972, v. 33, № 3, p. 828—837.
428. **Ladyzenskaya O. A.** The survey of the results and urgent problems, connected with the Navier-Stokes equations. (On the hydrodynamic stability).—“*Fluid Dynam. Trans.*”, 1971, v. 16, part 1, p. 275—291.
429. **Lakin W. D., Reid W. H.** Stokes multipliers for the Orr — Sommerfeld equation.—“*Phil. Trans. Roy. Soc. London. A*”, 1970, v. 268, № 1190, p. 325—349.

430. **Laufer J.** Some recent measurements in a two-dimensional turbulent channel.—“*J. Aeron. Sci.*”, 1950, v. 5, p. 277—287.
431. **Laufer J.** Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel.—“*Nat. Advis. Com. Aeronaut.*”, 1951, Rept. № 1033.
432. **Laufer J.** The structure of turbulence in fully developed pipe flow.—“*Nat. Advis. Com. Aeronaut.*”, 1954, Rept. № 1174.
433. **Lawn C. J.** The determination of the rate of dissipation in turbulent pipe flow.—“*J. Fluid Mech.*”, 1971, v. 48, № 3, p. 477—508.
434. **Lee L. H., Reynolds W. C.** On the approximate and numerical solution of Orr—Sommerfeld problems.—“*Quart. J. Mech. and Appl. Math.*”, 1967, v. 20, № 1, p. 1—22.
435. **Leite R. J.** An experimental investigation of the stability of Poiseuille flow.—“*J. Fluid. Mech.*”, 1959, v. 5, № 1, p. 81—96.
436. **Lessen M., Cheifetz M. G.** Stability of plane Couette flow with respect to finite two—dimensional disturbances.—“*Phys. Fluids*”, 1975, v. 18, № 8, p. 939—944.
437. **Lessen M., Chen B. H.-P., Lau K. H.** The instability of pipe Poiseuille flow with respect to finite amplitude disturbances.—In: *Instability of continuous systems*. Berlin, 1971, p. 361—367.
438. **Lessen M., Harpavat G., Zien H. M.** Stability of threedimensional laminar and turbulent shear layers. —“*J. Fluid Mech.*”, 1969, v. 38, № 1, p. 39—60.
439. **Lin C. C.** On the stability of two-dimensional parallel flows.—“*Quart. Appl. Math.*”, 1945, v. 3, p. 117—142, 218—234, 277—301.
440. **Lin S. P.** Comments on surface boundary conditions for small amplitude waves on a falling liquid.—“*AICHE J.*”, 1972, v. 18, № 6, p. 1262—1263.
441. **Ling Chi Hai, Reynolds W. C.** Non-parallel corrections for the stability of shear flow.—“*J. Fluid Mech.*”, 1973, v. 59, № 3, p. 571—591.
442. **Liu J. T. C.** Nonlinear development of instability wave in a turbulent wake.—“*Phys. Fluids*”, 1971, v. 14, № 11, p. 2251—2257.
443. **Lock R. C.** The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field.—“*Proc. Roy. Soc. London. A*”, 1955, v. 233, p. 105—125.
444. **Loer St.** Examination of the stability of disturbed boundary-layer flow by a numerical method.—“*Phys Fluids*”, 1969, v. 12, № 12, p. 139—145.
445. **Lorentz H. A.** Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen und über den Einfluss dieses Bewegungen bei der Strömung durch Rohren.—“*Abh. theor. Phys. Lpz.*”, 1907, Bd. 1, S. 43—71.
446. **Mack L. M.** On the application of linear stability theory to the problem of supersonic boundary-layer transition.—“*AIAA Pap.*”, 1974, v. 134, 16 p.
447. **Malkus W. V. R.** Outline of a theory of turbulent shear flow.—“*J. Fluid Mech.*”, 1956, v. 1, № 3, p. 521—539.
448. **Malkus W. V. R.** Absolute stability and upper bounds on turbulent transport.—In: *Stud. Optimization*, I, 1970, p. 37—42.
449. **Marshall E., Salazar R.** Linear stability analysis of falling films.—“*Ind. and Eng. Chem. Fundam.*”, 1974, v. 13, № 3, p. 289—291.

450. **Meksyn D., Stuart J. T.** Stability of viscous motion between parallel flows for finite disturbances.—“Proc. Roy. Soc.”, 1951, v. A 208, № 1095, p. 517—526.
451. **Michael D. N.** Stability of plane parallel flows of electrically conducting fluids.—“Proc. Cambridge Phil. Soc.”, 1953, v. 41, № 1, p. 166—168.
452. **Midvidy W., Rouleau W. T.** Linear stability of Poiseuille flow in an elastic tube.—“CANCAM 73. C. r. 4ème congr. can. méc. appl., Montréal”, 1973, p. 583—584.
453. **Mises R.** Kleiner Schwingungen und Turbulenz.—“Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1912, Bd. 21, S. 241—248.
454. **Mitchell J. E., Hanratty T. J.** A study of turbulence at a wall using an electrochemical wall shear-stress meter.—“J. Fluid Mech.”, 1966, v. 26, № 1, p. 199—221.
455. **Morrison W. R. B., Bullock K. J., Kronauer R. E.** Experimental evidence of waves in the sublayer.—“J. Fluid Mech.”, 1971, v. 47, № 4, p. 639—656.
456. **Mott J. E., Joseph D. D.** Stability of parallel flow between concentric cylinder.—“Phys. Fluids”, 1968, v. 11, № 10, p. 2065—2073.
457. **Nachtsheim P. R.** An initial value method for the numerical treatment of the Orr — Sommerfeld equation for the case of plane Poiseuille flow.—“NASA Tech. Note D-2414”, 1964.
458. **Nakaya Ch.** Excitation of nonrotationally symmetric modes in Couette flow.—“J. Phys. Soc. Japan.”, 1972, v. 33, № 5, p. 1503.
459. **Nakaya Ch.** Domain of stable periodic vortex flows in a viscous fluid between concentric circular cylinders.—“J. Phys. Soc. Japan”, 1974, v. 36, № 4, p. 1164—1173.
460. **Nakaya Ch., Hasegawa E.** Instability of two horizontal fluid layers due to interface waves.—“J. Phys. Soc. Japan”, 1974, v. 37, № 1, p. 214—222.
461. **Narayanan M. A. B., Narayana T.** Some studies on transition from laminar to turbulent flow in a two-dimensional channel.—“Z. angew. Math. und Phys.”, 1967, Bd. 18, S. 642—650.
462. **Nardini R.** Su un caso particolare di stabilità in media della magnetoidrodinamica.—“Ann. mat. pura ed appl.”, 1970, v. 84, p. 95—100.
463. **Nayakawa N.** Bounds of mass transport of flow on an inclined plate.—“Z. angew. Math. und Phys.”, 1970, Bd. 21, № 5, S. 685—689.
464. **Nayakawa N., Unny T. E.** Viscous stability of parallel streams of superposed fluids.—“Phys. Fluids”, 1974, v. 17, № 5, p. 879—882.
465. **Nayfeh A. H., Saric W. C., Mook D. T.** Stability of non-parallel flows.—“Arch. mech. stosow.”, 1974, v. 26, № 3, p. 401—406.
466. **Nihoul J. C. J.** Description hamiltonienne des phénomènes irréversibles stationnaires et éléments d'une théorie de la turbulence.—“J. méc.”, 1967, v. 6, № 2, p. 171—178.
467. **Nihoul J. C. J.** Tentative Lagrangian for the Determination of the Mean Velocity profile in Turbulent channel flow by a Hamiltonian Principle.—“Z. angew. Math. und Mech.”, 1968, Bd. 48, № 8, S. 223—224 (Sonderheft).

468. **Nihoul J. C. J.** On a principle of "Minimum Reynolds number" and Malcus theory of turbulent channel flow.— "Bull. Soc. Roy. des Sci. de Liege", 1969, v. 38, № 3—4, p. 73—85.
469. **Nihoul J. C. J.** A variational approach to turbulent shear flow.— "Physica", 1970, v. 47, № 1, p. 125—136.
470. **Nikuradse J.** Strömungs gesetze in rauhen Röhren.— "VDI-Forschungsheft", 1933, № 361.
471. **Noether F.** Zur asymptotischen Behandlung der Stationären Lösungen.— "Z. angew. Math. und Mech.", 1926, Bd. 6, S. 232, 339, 428, 497.
472. **Ohji Miduo.** Statistical theory of wall turbulence.— "Phys. Fluids", 1967, v. 10, № 9, pt. 2, p. 153—154.
473. **Orr W. McF.** The stability or instability of the steady motion of a liquid.— "Proc. Roy. Irish. Acad. A", 1906—1907, v. 27, p. 9—27, 69—138.
474. **Orszag S. A.** Accurate solution of the Orr — Sommerfeld stability equation.— "J. Fluid Mech.", 1971, v. 50, № 4, p. 689—704.
475. **Osborn M. R.** Numerical methods for hydrodynamic stability problems.— "SIAM J. Appl. Math.", 1967, v. 15, № 3, p. 539—557.
476. **Partom Y., Wassersform E.** Numerical approach to the stability of inviscid parallel flows.— "Isr. J. Technol.", 1967, v. 5, № 1—2, p. 65—70.
477. **Patel V. C., Head M. R.** Some observation on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flow.— "J. Fluid Mech.", 1969, v. 38, № 1, p. 181—202.
478. **Pekeris C. L., Shkoller B.** Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amplitude in the vicinity of the neutral curve.— "J. Fluid Mech.", 1967, v. 29, № 1, p. 31—38.
479. **Pekeris C. L., Shkoller B.** Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amplitude.— "J. Fluid Mech.", 1969, v. 39, № 3, p. 611—628.
480. **Pekeris C. L., Shkoller B.** The neutral curves of periodic perturbations of finite amplitude of plane Poiseuille flow.— "J. Fluid Mech.", 1969, v. 39, № 3, p. 629—639.
481. **Pekeris C. L., Shkoller B.** Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amplitude. III.— "Proc. Nat. Acad. Sci.", 1971, v. 68, № 7, p. 1434—1435.
482. **Platten J. K.** A variational formulation for the stability of flows with temperature gradients.— "Int. J. Eng. Sci.", 1971, v. 9, № 9, p. 855—869.
483. **Platten J. K.** A variational method in stability analysis.— "Proc. Heat. Transfer and Fluid Mech. Inst. Northridge, Calif., 1972", Stanford, 1972, p. 296—320.
484. **Platten J. K., Flandroy P., Vanderborck G.** Variational and accurate solution of the Orr — Sommerfeld equation.— "Int. J. Eng. Sci.", 1974, v. 12, № 12, p. 995—1006.
485. **Popovich A. T., Hunnel R. L.** Experimental study of the viscous sublayer in turbulent pipe flow.— "AIChE J.", 1967, v. 13, № 5, p. 854—860.
486. **Potter M. C.** Stability of plane Couette — Poiseuille flow.— "J. Fluid Mech.", 1966, v. 24, № 3, p. 609—619.

487. **Potter M. C.** Linear stability of symmetrical parabolic flows.—“Phys. Fluids”, 1967, v. 10, № 3, p. 479—482.
488. **Potter M.** Linear stability of turbulent flow profiles.—“Phys. Fluids”, 1971, v. 14, № 7, p. 1323—1325.
489. **Pradhan G. K.** Modification of Synge’s criterion for stratified shear flow for spatially growing disturbances.—“Acta mech.”, 1973, v. 16, № 3—4, p. 285—287.
490. **Prandtl L.** Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz.—“Z. angew. Math. und Mech.”, 1925, Bd. 5, № 2, S. 136—139.
491. **Prandtl L.** Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz.—“Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, Math.-Phys.”, 1945, S. 6—19.
492. **Rabinowitz P. N.** A priori bounds for some bifurcation problems in fluid dynamics.—“Arch. Ration. Mech. and Anal.”, 1973, v. 49, № 4, p. 270—285.
493. **Raetz G. S.** A new theory of the cause of transition in fluid flows.—“Norair Rept. NOR-59-383”, 1959.
494. **Raetz G. S.** Current status of resonance theory of transition.—“Norair Rept. NOR-64-111”, 1964.
495. **Rathy R. K., Chandra K.** Hydrodynamic stability of densitystratified spiral flow.—“AIAA J.”, 1973, v. 11, № 4, p. 544.
496. **Rayleigh.** On the stability or instability of certain fluid motions.—“Scient. Papers.”, 1880, v. 1, p. 474—484.
497. **Rayleigh.** On the stability of the laminar motion of an inviscid fluid.—“Scient. Papers”, 1913, v. 6, p. 197—204.
498. **Rayleigh.** On the stability of the simple shearing Motion of a viscous incompressible fluid.—“Scient. Papers”, 1915, v. 6, p. 341—349.
499. **Reichardt H.** Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen turbulenten Couetteströmung.—“Z. angew. Math. und Mech.”, 1956, Bd. 36, S. 26—29 (Sonderheft).
500. **Reid W. N.** The stability of parallel flows.— In: Basic development in Fluid Mechanics, 1965, v. 1, p. 249—407.
501. **Reid W. N.** Composite approximations to the solutions of the Orr — Sommerfeld equation.—“Stud. Appl. Math.”, 1972, v. 51, № 4, p. 341—368.
502. **Reid W. N.** Uniform approximations to the solutions of the Orr — Sommerfeld equation. Part. 1. Plane Couette flow.—“Stud. App. Math.”, 1974, v. 53, № 2, p. 91—110.
503. **Reynolds O.** Experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels.—“Phil. Trans. Roy. Soc. London”, 1883, v. 174, p. 935—982.
504. **Reynolds W. C.** Large — scale instabilities of turbulent wakes.—“J. Fluid Mech.”, 1972, v. 54, № 3, p. 481—488.
505. **Reynolds W. C., Hussain A. R. M.** The mechanics of organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparisons with experiments.—“J. Fluid Mech.”, 1972, v. 54, № 2, p. 263—288.

506. **Reynolds W. C., Potter M. C.** Finite-amplitude instability of parallel shear flows.—“J. Fluid Mech.”, 1967, v. 27, № 3, p. 465—492. См. также: У. Рейнольдс, М. С. Поттер. Конечно-амплитудная неустойчивость параллельных сдвиговых потоков. «Механика», 1968, № 2, с. 71—98.
507. **Reynolds W. C., Tiederman W. G.** Stability of turbulent channel flow with application to Malkus's theory.—“J. Fluid. Mech.”, 1967, v. 27, № 2, p. 253—272.
508. **Riis E.** The stability of Couette-flow in non-stratified and stratified viscous fluids.—“Geofys. Publ.”, 1962, v. 23, № 4, p. 37.
509. **Roberts B.** Stability of a shear layer in a viscous fluid.—“Phys. Fluids.”, 1974, v. 17, № 9, p. 1771—1773.
510. **Robinson J. L.** Stability of an inviscid shear layer which is periodic in space.—“N. Z. J. Sci.”, 1973, v. 16, № 4, p. 903—909.
511. **Rose W. C., Murphy J. D.** Ratio of Reynolds shear stress to turbulent kinetic energy in a boundary layer.—“Phys. Fluids”, 1973, v. 16, № 6, p. 935—936.
512. **Sato H.** The stability and transition of two — dimensional jet.—“J. Fluid Mech.”, 1960, v. 7, № 1, p. 53—80.
513. **Sato H., Kuriki K.** The mechanism of transition in the wake of a thin flat plate placed parallel to a uniform flow.—“J. Fluid. Mech.”, 1961, v. 11, № 3, p. 321—352.
514. **Sato H., Sakao F.** An experimental investigation of the instability of a two-dimensional jet at low Reynolds numbers.—“J. Fluid. Mech.”, 1964, v. 20, № 2, p. 337—352.
515. **Sattinger D. H.** The mathematic problem of hydrodynamic stability.—“J. Math. and Mech.”, 1970, v. 19, № 9, p. 797—819.
516. **Sattinger D. H.** Bifurcation of periodic solutions of the Navier — Stokes equations.—“Arch. Ration. Mech., and Anal.”, 1971, v. 41, № 1, p. 66—80.
517. **Savulescu S., Nastase A.** Theoretische Ableitung des turbulenten Geschwindigkeitsprofils auf Grund des Minimums des Gesamtenergie der Schwankungen.—“Wiss. Z. Tech. Univ. Dresden”, 1967, Bd. 16, № 4, S. 1222—1224.
518. **Schlichting H.** Über die Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung.—“Gesellschaft der Wissensechaften Göttingen, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Nachrichten”, 1932, S. 160—198.
519. **Schubauer G. B., Skramstad H. K.** Laminar boundary-layer oscillations and transition on a flat plate.—“NACA Tech. Rept”, 1943, № 909.
520. **Schubauer G. B., Skramstad H. K.** Laminar boundary-layer oscillations and stability of laminar flow.—“J. Aeronaut. Sci.”, 1947, v. 14, № 2, p. 69—78.
521. **Schubert G., Corcos G. M.** The dynamics of turbulence near a wall according to a linear model.—“J. Fluid Mech.”, 1967, v. 29, № 1, p. 113—135.
522. **Schwarz K. W., Springett B. E., Donnelly R. J.** Modes of instability in spiral flow between rotating cylinders.—“J. Fluid Mech.”, 1964, v. 20, № 2, p. 281—289.
523. **Serrin J.** Mathematical principles of classical fluid mechanics.—In: Handbuch die Physik, 1959, v. 8, part 1, p. 125—263.

- См. также: Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкостей. М., ИЛ, 1963.
524. **Serrin J.** On the stability of viscous fluid motions.—“Arch. Ration. Mech. and Anal.”, 1959, v. 3, № 1, p. 1—13.
525. **Sherlin G. C.** Behaviour of isolated disturbances superimposed on laminar flow in a rectangular pipe.—“J. Res. N. B. S.”, 1960, Ser. A, v. 64, p. 281.
526. **Snyder H. A.** Experiments of the stability of spiral flow at low axial Reynolds numbers.—“Proc. Roy. Soc.”, 1962, v. 265, № 1321, p. 198—214.
527. **Snyder H. A.** Stability of rotating Couette flow. I. Asymmetric wave forms.—“Phys. Fluids”, 1968, v. 11, № 4, p. 728—734.
528. **Snyder H. A.** Stability of rotating Couette flow. II. Comparison with numerical results.—“Phys. Fluids”, 1968, v. 11, № 8, p. 1599—1605.
529. **Sommerfeld A.** Ein Beitrag zur Hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung.—“Proc. 4-th Intern. congress math., Rome”, 1908, p. 116—124.
530. **Southwell R. V.** Note on the stability of laminar shearing motion in a viscous incompressible fluid.—“Phil. Mag. Roy. Soc. London”, 1924, v. 48, p. 540—553.
531. **Southwell R. V., Chitty L.** On the problem of hydrodynamic stability. I. Uniform shearing motion in viscous liquid.—“Phil. Mag. Roy. Soc. London. A”, 1930, v. 229, p. 205—283.
532. **Sozou C.** On the stability of plane flow of a conducting fluid in the presence of a coplanar magnetic field.—“J. Fluid Mech.”, 1970, v. 43, № 3, p. 591—596.
533. **Sparrow E. M., Munro W. D., Jonsson V. K.** Instability of the flow between rotating cylinders: the wide-gap problem.—“J. Fluid Mech.”, 1964, v. 20, № 1, p. 35—46.
534. **Speziale C. G., Kirchner R. P.** On the use of the method of quadrature by differentiation for solving eigenvalue problems in hydrodynamic stability.—“J. Comput. Phys.”, 1974, v. 16, № 4, p. 315—323.
535. **Spiegel E. A.** On the Mulcus theory of turbulence.—In: Mécanique de la turbulence (Collog. Intern. du Centre Nat. Rech. Sci. à Marseille), 1962, v. 108, p. 181—201.
536. **Squire H. B.** On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls.—“Proc. Roy. Soc. London. A”, 1933, v. 142, p. 621—628.
537. **Sternberg J. A.** A theory for the viscous sublayer of a turbulent fluid.—“J. Fluid Mech.”, 1962, v. 13, № 2, p. 241—271.
538. **Stewartson K.** Some aspects of nonlinear stability theory.—“Fluid Dynam. Trans.”, 1974, v. 7, № 1, p. 101—128.
539. **Stewartson K., Stuart J. T.** A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow.—“J. Fluid Mech.”, 1971, v. 48, № 3, p. 529—546.
540. **Strehle E.** Stabilität von Grenzschichten.—“Maschinenbautechnik”, 1973, Bd. 22, № 4, S. 155—157.

541. **Stuart J. T.** On the stability of viscous flow between parallel planes in the presence of a complanar magnetic field.—“Proc. Roy. Soc. London. A”, 1954, v. 221, p. 189—206.
542. **Stuart J. T.** Non-linear effects in hydrodynamic stability.—“Proc. X Intern. Congr. Appl. Mech., Stresa, 1960”, Amsterdam, 1962, p. 64—97.
543. **Stuart J. T.** Non-linear stability theory.—“Annual Rev. Fluid Mech.”, 1971, v. 3, p. 347—370.
544. **Sukanek P. C., Goldstein C. A., Laurence R. L.** The stability of plane Couette flow with viscous heating.—“J. Fluid Mech.”, 1973, v. 57, № 4, p. 651—670.
545. **Synge J. L.** Hydrodynamic stability.—“Semi-centennial publications Amer. Math. Soc.”, 1938, v. 2, p. 227—269.
546. **Szablewski W.** Zur bilanz der Turbulenzenergie und ihrer Komponenten in inkompressiblen turbulent Grenzschichten.—“Z. angew. Math. und Mech.”, 1973, Bd. 53, № 6, S. 313—322.
547. **Tani I.** Einige Bemerkungen über den Laminar—turbulenten Umschlag in Grenzschichtströmungen.—“Z. angew. Math. und Mech.”, 1973, Bd. 53, № 4, S. 125—132.
548. **Tatsumi T.** MGD-stability and turbulence.—“Progr. Theoret. Phys., Suppl.”, 1962, v. 24, p. 156—193.
549. **Tatsumi T., Kakutani T.** The stability of a two-dimensional jet.—“J. Fluid Mech.”, 1958, v. 4, № 2, p. 261—275.
550. **Taufer J.** Factorisierungsmethode für ein Eigenwertproblem eines Linearen systems von Differentialgleichungen.—“Apl. mat.”, 1968, v. 13, № 2, p. 199—200.
551. **Taylor G. I.** Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders.—“Phil. Trans. Roy. Soc. London. A”, 1923, v. 233, p. 289—343.
552. **Thomas L. H.** The stability of plane Poiseuille flow.—“Phys. Rev.”, 1953, v. 91, № 4, p. 780—783.
553. **Tollmien W.** Über die Entstehung der Turbulenz.—“Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.—Phys”, 1929, S. 21—44.
554. **Townsend A. A.** Remarks on the Malkus theory of turbulent flow.—“Collog. Intern. Centre Nat. Rech. Sci.”, 1962, № 108, p. 167—180.
555. **Twitereid M.** On the stability of thermally stratified plane Poiseuille flow.—“Z. angew. Math. und Mech.”, 1974, Bd. 54, № 9, S. 533—540.
556. **Ueda H., Hinze J. O.** Finite-structure turbulence in the wall region of a turbulent boundary layer.—“J. Fluid Mech.”, 1975, v. 67, № 1, p. 125—143.
557. **Usher J. K., Craik A. D. D.** Nonlinear wave interaction in shear flows. Part 1. A variational formulation.—“J. Fluid Mech.”, 1974, v. 66, № 2, p. 209—222.
558. **Usher J. R., Craik A. D. D., Hendriks F.** Nonlinear wave interactions in shear flows. Part 2. Third-order theory.—“J. Fluid Mech.”, 1975, v. 70, № 3, p. 437—461.

559. **Van Driest E. R.** On turbulent flow near a wall.—“*J. Aeronaut. Sci.*”, 1956, v. 23, № 11, p. 1007—1011.
560. **Velte W.** Über nichtlineare stabilitäts problem der Hydrodynamik.—“*Z. angew. Math. und Mech.*”, 1962, Bd. 42, S. 166—167 (Sonderheft).
561. **Vest C. M., Aspaci V. S.** Stability of natural convection in a vertical slot.—“*J. Fluid Mech.*”, 1969, v. 36, № 1, p. 1—16.
562. **Wallace J. M., Eckelmann H., Brodkey R. S.** The wall region in turbulent shear flow.—“*J. Fluid Mech.*”, 1972, v. 54, N 1, p. 39—48.
563. **Wasow W.** On small disturbances of plane Couette flow.—“*J. Res. Nat. Bur. Standards*”, 1953, v. 51, № 4, p. 195—202.
564. **Watson J.** Three-dimensional disturbances in flow between parallel planes.—“*Proc. Roy. Soc. London. A*”, 1960, v. 254, p. 562—569.
565. **Watson J.** On spatially-growing finite disturbances in plane Poiseuille flow.—“*J. Fluid Mech.*”, 1962, v. 14, № 2, p. 211—221.
566. **Wazzan A. R., Keltner G., Okamura T. T., Smith A. M. O.** Spatial stability of stagnation water boundary layer with heat transfer.—“*Phys. Fluids*”, 1972, v. 15, № 12, p. 2114—2117.
567. **Wazzan A. R., Okamura T., Smith A. M. O.** The stability of water flow over heated and cooled flat plates.—“*Trans. ASME*”, 1968, v. 90, № 1, p. 109—114.
568. **Wazzan A. R., Taghavi H., Keltner G.** Effect of boundary-layer growth on stability of incompressible flat plate boundary layer with pressure gradient.—“*Phys. Fluids*”, 1974, v. 17, № 9, p. 1655—1660.
569. **Wedemeyer E.** Stabilität spiraliger Strömungen in einen zylindrischen Ringraum.—“*Mitt. M-Planck-Inst. Strömungsforsch und Aerodyn. Versuchsanst.*”, 1969, Bd. 44, S. 635.
570. **Werle M. J., Mook D. T., Tang H.** Effect of free-stream vorticity on boundary — layer stability.—“*Phys. Fluids*”, 1973, v. 16, № 4, 457—462.
571. **Willmarth W. W., Lu S. S.** Structure of Reynolds stress near the wall.—“*J. Fluid Mech.*”, 1972, v. 55, № 1, p. 65—92.
572. **Wolf P.** Stabilitäts untersuchungen zur ebenen Kanal strömung eines linearen Cosserat—Kontinuus.—“*Wiss. Z. Tech. Nach. Chem. Leuna-Merseburg.*”, 1974, v. 16, № 1, p. 42—47.
573. **Wooler P. T.** Instability of flow between parallel planes with a co — planar magnetic field.—“*Phys. Fluids*”, 1961, v. 4, № 1, p. 24—27.
574. **Wyganski I. J., Champagne F. H.** On transition in a pipe. Part I. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug.—“*J. Fluid Mech.*”, 1973, v. 59, № 2, p. 281—335.
575. **Wyganski I. J., Sokolov M., Friedman D.** On transition in a pipe. Part II. The equilibrium puff.—“*J. Fluid Mech.*”, 1975, v. 69, № 2, p. 283—304.

576. **Yamashita I., Takemasu M.** A numerical study of the instability of three-dimensional boundary layers.— "Repts. Res. Inst. Appl. Mech.", 1974, v. 22, № 69, p. 1—14.
577. **Yeow Y. L.** On the stability of extending films: a model for the film casting process.— "J. Fluid Mech.", 1974, v. 66, № 3, p. 613—622.
578. **Yih Chia-Shun.** Note on eigenvalue bounds for the Orr — Sommerfeld equation.— "J. Fluid Mech.", 1969, v. 38, № 2, p. 273—278.
579. **Yih Chia-Shun.** Wave velocity in parallel flows of a viscous fluid.— "J. Fluid Mech.", 1973, v. 58, № 4, p. 703—708.
580. **Zahn J.-P., Toomre J., Spiegel E. A., Gough D. O.** Nonlinear cellular motions in Poiseuille channel flow.— "J. Fluid Mech.", 1974, v. 64, № 2, p. 319—346.
581. **Zaric Z.** Wall turbulence studies.— "Adv. Heat. Transfer.", 1972, v. 8, p. 285—350.
582. **Zondek B., Thomas L.** Stability of limiting case of plane Couette flow.— "Phys. Rev.", 1953, v. 90, p. 738.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	3
Глава I. Методы решения задач гидродинамической устойчивости . . . . .	13
§ 1. Анализ уравнения Орра — Зоммерфельда и методы его решения . . . . .	—
§ 2. Метод исключения . . . . .	27
§ 3. Метод дифференциальной прогонки . . . . .	33
§ 4. Некоторые свойства решений и приемы интегрирования прогоночной системы . . . . .	39
§ 5. Методы решения нелинейных задач . . . . .	46
Глава II. Линейная устойчивость одномерных течений . . . . .	54
§ 1. Постановка задачи об устойчивости параллельных течений . . . . .	—
§ 2. Устойчивость плоского течения Куэтта . . . . .	61
§ 3. Неустойчивость плоского течения Пуазейля и некоторые общие аспекты генерации пульсационной энергии . . . . .	66
§ 4. Влияние формы профиля скорости на характеристики устойчивости . . . . .	78
§ 5. Устойчивость осесимметричных течений . . . . .	83
§ 6. Устойчивость пограничного слоя и струйных течений . . . . .	105
§ 7. Устойчивость МГД-течений в плоском канале . . . . .	115
§ 8. О пространственном росте возмущений . . . . .	131
Глава III. Энергетический анализ . . . . .	136
§ 1. Задача Орра . . . . .	—
§ 2. Энергетические оценки для профилей скорости с точками перегиба . . . . .	146
§ 3. Аналог задачи Орра для МГД-течений . . . . .	149
§ 4. Обобщение энергетического метода . . . . .	160
Глава IV. Нелинейная устойчивость и генерация автоколебаний . . . . .	174
§ 1. Ламинарно-турбулентный переход в параллельных течениях . . . . .	—
§ 2. Бифуркация решений уравнений Навье — Стокса и возникновение автоколебаний . . . . .	180

§ 3. Ответвление автоколебательного режима от течения Пуайзеля в продольном магнитном поле	188
§ 4. Возникновение автоколебаний в пограничном слое	193
§ 5. Модельный анализ устойчивости в целом	204
§ 6. Моногармоническое приближение	212
§ 7. Модельные автоколебания со сдвигом фаз	230
§ 8. Резонансное трехгармоническое взаимодействие	235
<b>Глава V. Принцип максимальной устойчивости</b>	<b>252</b>
§ 1. Основные сведения	253
§ 2. Устойчивость как свойство турбулентных течений	266
§ 3. Квазиламинарная устойчивость турбулентного потока в канале	274
§ 4. Принцип максимальной устойчивости усредненных турбулентных течений	282
§ 5. Локальный расчет характеристик турбулентного профиля	292
§ 6. О непосредственном взаимодействии неслучайного сигнала с турбулентностью	299
§ 7. Приближенная теория пристенной турбулентности	307
<b>Литература</b>	<b>332</b>

*Михаил Александрович Гольдштик,  
Владимир Николаевич Штерн*

**ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ  
УСТОЙЧИВОСТЬ  
И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ**

Ответственный редактор  
*Самсон Семенович Кутателадзе*

Редактор Л. Н. Спиридонова  
Художественный редактор Т. Ф. Каминина  
Художник Е. Ф. Новиков  
Технический редактор Ф. Ф. Орлова  
Корректоры Л. Л. Тычкина, З. Д. Сабитова

---

Сдано в набор 23 июля 1976 г. Подписано в печать 21 апреля 1977 г.  
МН 02037. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага типографская № 3. 11,5 печ. л.,  
19,3 усл. печ. л., 18,7 уч.-изд. л. Тираж 2200 экз. Заказ 211. Цена 2 р. 23 к.

---

Издательство «Наука», Сибирское отделение, 630099, Новосибирск, 99,  
Советская, 18.

4-я типография издательства «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станислав-  
ского, 25.